新課程

大学への
数学II

ニューアプローチ

New Approach

東京大学名誉教授・明治大学教授
藤田　宏
大東文化大学教授
長岡亮介
駿台予備学校教科専任講師
長岡恭史
共著

研文書院

新課程

大学への
数学 II
ニューアプローチ

東京大学名誉教授・明治大学教授
藤 田 宏

大東文化大学教授
長 岡 亮 介

駿台予備学校教科専任講師
長 岡 恭 史

共著

New Approach

研文書院

はしがき

本書が属しているシリーズ“大学への数学ニューアプローチ”は，姉妹編，数学Ⅰ，数学Aのはしがきで述べたように，ふたつのキーワードのそれぞれに象徴される次のねらいをもっている．

その第一は，数学に関するかぎり**大学受験での成功**に自信が持てる学力を，将来の発展につながる**正統的な勉強**により身につけようとする諸君のお役に立つことである．

第二は，そのような**高い水準**に到達するための読者の**負担が最小化**されるように，すなわち，読者の努力が効率よく活き，才能が引き出されるように題材および表現の工夫をこらしてのニューアプローチ(新しい近づき方)を提供することである．

一流の大学—そこでは現代数学の研究者である教授達が数学の出題を行なう—の入試に関しては，高校数学の範囲であっても，浅薄な「技」や「術」を頼るべきではなく，やはり，正統的な理論を理解し，筋目のただしい問題解決力を身につけることが成功への王道である，また，こうした勉強が，理系のみならず文系の諸専門に進む場合にも，これからの社会で尊重される数学的な知性の育成につながるはずである．

“東大への解析Ⅰ，解析Ⅱ”として誕生した，大学への数学シリーズはすでに40年余の歴史を持っている．幸いに，大学へのシリーズにこめた，”正統的な勉学による実力の育成を”との我々の主張は、進学校の真剣な先生方の評価，および，気力と志に富んだ高校・受験生の支持を一貫して受け続けたのであった．”この伝統的な長所は今回のシリーズでも確保したつもりである．

一方，センター試験が高校生の心配事として先行する現実のもとでは，理論体系に忠実なあまり，あるいは性急な完全主義により，難行苦行を若い諸君に強いることは酷であり，実際的ではない．また，数学の優れた資質を備えた生徒のなかにも，大要を先

に理解して後に知識の掘り下げに務めるのが大成の道であるタイプが少なくない．ニューアプローチから入ることをすすめたい場合である．

紙面づくりに関しても，視覚的な情報摂取への傾斜が著しい今日，現代風な体裁になれた読者がなじみやすいようにとの配慮から，“ニューアプローチ”では，A篇の簡素化，活字の改善、視覚的な印象の重視，発展的材料の巻末章への分離などを行なっている．しかし，最重要部分である問題篇のB篇では，従来のスタイルと性格を維持しつつ最近の動向をにらんでの更新に努めた．

さて，本書の内容は，数学IIの単元，すなわち，座標と代数計算を用いて図形を調べる解析幾何の入門部分，いくつかの初等関数（指数関数・対数関数，三角関数）の基本性質，多項式に対象を限っての微積分法の初歩に関する解説と演習である．これらの単元を学習する意義と目標については，それぞれの章の導入文を見て頂きたいが，ここで，つぎのことを強調しておこう．断片的になりがちな高校数学のなかで，いわゆる解析学の基礎に向けてのまとまりを形作っているこれらの単元の知識（その進んだ形）の上に，古くはニュートンの惑星運動の解明という偉業がなされ，現在では，コンピュータを駆使して先端の科学技術を支える応用数理の諸分野が構築されているのである．

最後に，表だっては本書の著者陣に名を連ねてはいないが，若手の才気と活力を活かして貴重な寄与をして下さった乙藤隆史さん（東京工大），元木稔さん（海城学園高校），谷川雅子さん（西武学園文理高校）に感謝したい．また，この機会に，日本の社会の命運に関わる数学教育の重要性を認識し，正統な数学の学習を支援する参考書の刊行という難事を遂行している，研文書院とその代表者飯塚信之氏に敬意を表すものである．

1995年　冬

藤田宏　長岡亮介　長岡恭史

本書の特色

本書は，極めて個性の強い参考書であるが，その個性を短くまとめるなら，

基礎理論の解説・基本概念の説明に際しては，大学の立場に立って見てもおかしくない，きちんとしたものを与え
問題演習篇においては，真に取り組む価値のある良問を理論的・教育的配慮に基づいて体系的に精選・新作し，また〈なぜそのように解くか〉が伝わるような解答・解説をつけた

ということである．さらに，検定教科書の平板な叙述に飽きたらない読者のために，

上級の理論を視野に入れた発展的解説をもりこんだ

のも，他書にない特徴であろう．

本書の利用法

1° A基礎篇で知識を整理した後に，B篇の演習問題を解くのが普通の学習の順序であろうが，必ずしもこれにこだわる必要はない．現在の力に応じて，解けそうなB篇の問題から手をつけるのも良い方法である．

2° B演習問題の学習の理想的な形は，まず独力で問題に向かい，その結果を本書の解答と比較することである．しかし，読者の現在の実力によっては，まず，本書の解を熟読し，解法を支える基本的な考え方をしっかり理解するというのも，考えられる使い方の1つであろう．実際，本書で扱われる問題とそれに対するアプローチの考え方が理解できるだけで，大概の大学入試問題は，独力で解けるようになるはずである．

▨内 容 一 覧▨　A 基礎理論篇

§1　図形と方程式　□　キー・ワード　…… *1*

A1.1　直線上の分点の座標　…… *2*
A1.2　平面上の点の座標　…… *4*
A1.3　平面上の曲線の方程式　…… *8*
A1.4　直線の方程式　…… *9*
A1.5　円の方程式　…… *14*
A1.6　2曲線の共有点　…… *16*
A1.7　2円の交点を通る円，直線　…… *19*
A1.8　曲線の媒介変数表示　…… *20*
A1.9　不等式の表す領域　…… *22*
A1.10　図形と式の関係(反省)　…… *25*
A1.11　領域のパラメタ表示　…… *26*
A1.12　曲線族と軌跡　…… *28*
A1.13　解析的方法と幾何的方法　…… *29*

§2　三角関数　□　キー・ワード　…… *77*

A2.1　弧度法と一般角　…… *78*
A2.2　三角関数の定義　…… *80*
A2.3　三角関数の性質　…… *83*
A2.4　加法定理とその応用　…… *89*
A2.5　三角関数のいろいろな公式[補足]　*93*

§3　指数関数・対数関数　□　キー・ワード　…… *123*

A3.1　累乗と指数法則　…… *124*
A3.2　累 乗 根　…… *128*
A3.3　指数の拡張　…… *131*

A3.4　指数関数 …… *133*
A3.5　対　数 …… *134*
A3.6　対数関数 …… *138*

§4 微　分　□ キー・ワード …… *151*

A4.1　関数の極限の定義 …… *152*
A4.2　連続の概念 …… *153*
A4.3　極限値を計算するための基本公式 …… *154*
A4.4　無 限 大 …… *155*
A4.5　不定形の極限値の求め方 …… *156*
A4.6　微分係数と導関数 …… *158*
A4.7　微分の公式 …… *161*
A4.8　微分係数と接線 …… *164*
A4.9　関数の増減・極大・極小と微分係数 …… *165*
A4.10　関数の増減，極値の調べ方 … *168*
A4.11　導関数の応用 …… *169*
A4.12　３次関数，４次関数のグラフの概形 …… *172*

§5 積　分　□ キー・ワード …… *205*

A5.1　不定積分 …… *206*
A5.2　不定積分の求め方 …… *207*
A5.3　定 積 分 …… *208*
A5.4　定積分の性質 …… *210*
A5.5　面積と定積分 …… *214*
A5.6　定積分の応用(面積) …… *215*
A5.7　定積分の応用(体積) …… *217*
A5.8　定積分の応用(変位と道のり) …… *218*

▨ 内 容 一 覧 ▨　B 演習問題篇 (159 題)

§1　図形と方程式　(43 題)

B.101〜102	2点間の距離の公式の応用	……… ***32***
B.103	三角形の重心	……… ***34***
B.104〜107	直線の方程式	……… ***35***
B.108〜109	点と直線の距離の公式とその応用	……… ***39***
B.110〜114	円の方程式，円と直線	……… ***41***
B.115〜118	円と円	……… ***47***
B.119〜130	動点の軌跡	……… ***51***
B.131〜134	不等式と領域	……… ***63***
B.135〜139	領域と最大・最小	……… ***67***
B.140〜141	平面上の点の変換	……… ***72***
B.142〜143	曲線の通過範囲	……… ***74***

§2　三角関数　(29 題)

B.201	弧度法の価値	……… ***96***
B.202〜203	三角関数の間の基本関係	……… ***97***
B.204	三角関数のグラフ	……… ***98***
B.205〜207	三角関数の方程式・不等式	……… ***99***
B.208〜209	加法定理(sin, cos)	…… ***102***
B.210〜213	三角関数の合成とその応用	…… ***104***
B.214〜217	2倍角，半角，3倍角の公式	…… ***108***
B.218〜220	正接(tan)の加法定理とその応用	…… ***113***
B.221〜223	積を和に，和を積になおす公式	…… ***116***
B.224〜229	三角関数を利用して解く図形問題	…… ***117***

§3　指数関数・対数関数　(11 題)

B.301	対数の基本	…… ***140***
B.302	対数の基本的応用(桁数)	…… ***141***
B.303	底の変換公式	…… ***142***
B.304〜310	指数・対数の方程式，不等式，関数	…… ***143***
B.311	自然現象と指数・対数	…… ***150***

§4　微　　分（31 題）

B.401～403　極限値 …… 174
B.404～405　微分の公式 …… 177
B.406～408　微分の応用の基本（接線） …… 179
B.409～412　接する 2 曲線 …… 182
B.413～419　極大値，極小値 …… 186
B.420～426　最大値，最小値 …… 193
B.427～431　やや進んだ微分の応用 …… 200

§5　積　　分（26 題）

B.501～504　積分の計算法 …… 220
B.505～508　積分と面積の基本 …… 224
B.509～514　やや進んだ面積の問題 …… 228
B.515　円の面積と積分 …… 234
B.516～518　積分と体積 …… 235
B.519　積分と道のり …… 238
B.520～526　積分で表された関数 …… 239

§6　発展問題（19 題）

B.601～606　主に図形と方程式に関わる発展問題 …… 248
B.607　主に指数･対数関数に関わる発展問題 …… 256
B.608～611　主に三角関数に関わる発展問題 …… 257
B.612～619　主に微積分に関する発展問題 …… 261

▨内容一覧▨　C 探究篇

C. 1　図形の移動 …… **274**

C. 2　図形の変形(放物線は，みな相似) …… **276**

C. 3　共通弦の方程式 …… **278**

C. 4　平均とその図形的意味 …… **279**

C. 5　$F(x,\ y)>0$ の表す領域 …… **280**

C. 6　関数，変換，写像，… …… **281**

C. 7　合成関数 …… **282**

C. 8　指数の定義 …… **283**

C. 9　指数法則 …… **284**

C.10　指数関数と等差数列，等比数列 …… **286**

C.11　関数の周期性 …… **288**

C.12　3次関数の標準化 …… **289**

C.13　4次関数のグラフの分類 …… **290**

C.14　商(分数)の微分公式 …… **291**

C.15　商の微分公式の応用例 …… **292**

C.16　定積分で面積が求められるわけ …… **293**

▨内容一覧▨ ◇◇◇

◇◇◇

Repos（フランス語で，ひとやすみの意味）

関数のグラフなのか/方程式のグラフなのか？ …… ***31***
円とは何か …… ***76***
魔女のスランプ …… ***95***
指数法則と加法定理 …… ***139***
円周率 …… ***246***

◇◇◇

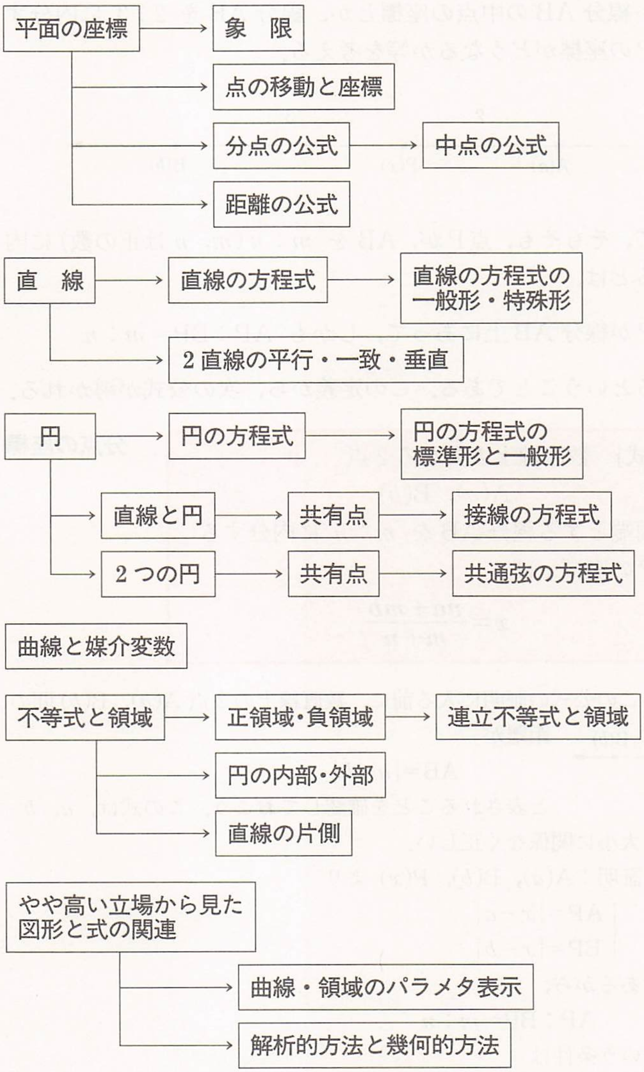
索　引 …… ***295***

◇◇◇

著者紹介 …… ***299***

§1 図形と方程式

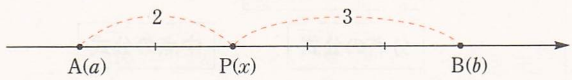
キー・ワード　（A基礎理論篇）



A1.1　直線上の分点の座標

直線上の点の位置を実数を用いて表示するという **数直線** と **座標** の考えについては数学Aで学んだ．☞「大学への数学A ニューアプローチ」p. 2

ここでは，数直線上の2点A，Bの座標 a，b がわかっているとき，線分ABの中点の座標とか，線分ABを 2：3 に内分する点Pの座標がどうなるか等を考える．



さて，そもそも，点Pが，ABを $m：n$ (m，n は正の数) に内分するとは，

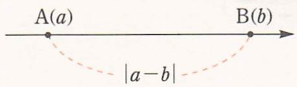
　Pが線分AB上にあって，しかも AP：BP $=m：n$

となるということである．この定義から，次の公式が導かれる．

分点の座標

> ［公式］　数直線上の異なる2点
>
> A(a)，B(b)
>
> を両端とする線分ABを $m：n$ に内分する点Pの座標 x は
>
> $$x=\frac{na+mb}{m+n}.$$

0°　この公式の証明に入る前に，数直線上の2点A(a)，B(b)間の距離が



$$\mathrm{AB}=|a-b|$$

と表されることを確認しておこう．この式は，a，b の大小に関係なく正しい．

1°　証明：A(a)，B(b)，P(x) より

$$\begin{cases}\mathrm{AP}=|x-a|\\ \mathrm{BP}=|x-b|\end{cases}$$

であるから，

$$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=m:n$$

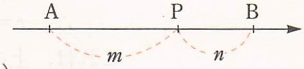
という条件は

$$|x-a|:|x-b|=m:n \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

と表すことができる．

いま，$a<b$ であると仮定すると，P が線分 AB 上にある条件は

$$a<x<b \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$



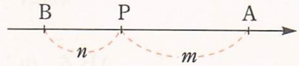
である．したがって，

$$\begin{cases}|x-a|=x-a\\|x-b|=b-x\end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots (*)$$

であるから，①は

$$(x-a):(b-x)=m:n \qquad \cdots\cdots\cdots ①'$$

となる．①′を，x について解いて



$$n(x-a)=m(b-x)$$

$$(m+n)x=na+mb$$

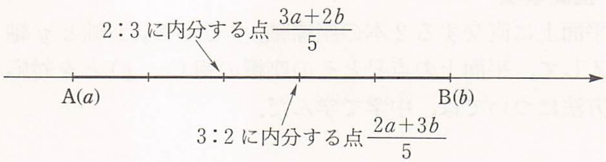
$$\therefore \quad x=\frac{na+mb}{m+n}.$$

反対に，$a>b$ の場合にも，(＊) の右辺が (-1) 倍されるだけで同じ結果を得る．

2°　$m=n=1$ とすると，**中点の座標を与える公式　$x=\dfrac{a+b}{2}$**

となる．

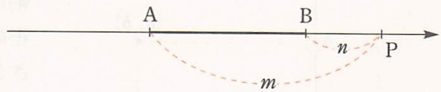
3°　前ページの公式を，結果を暗記して適用する際には，分子の m，n をとり違えないように注意が必要である．実際，AB を 2：3 に内分する点と 3：2 に内分する点とは違う！

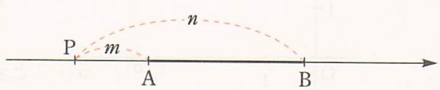


4°「線分 AB 上にある」という条件を，「線分 AB の延長または線分 BA の延長上にある」と変更すると，**外分** を考察することになる．外分点は，

$$\begin{cases}m>n \text{ のときは，線分 AB の延長上}\\m<n \text{ のときは，線分 BA の延長上}\end{cases}$$

に来る．





5°　上の公式は，以下のように修正すると，線分 AB を $m:n$ に

外分する点の座標を求めるのにも使える．

実際，たとえば線分 AB を 2：3 に外分する点Pの座標 x は

$$\mathrm{AP} : \mathrm{BP} = 2 : 3$$

より次式を満たす．

$$(a-x) : (b-x) = 2 : 3$$

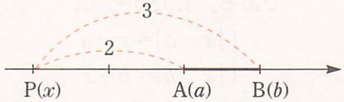
$$\therefore \quad x = 3a - 2b$$

これは，上の公式で

$$m = -2, \ n = 3$$

（あるいは，$m=2$，$n=-3$）

とおいて得られるものである．



一般に，次の事実がある．

外分点の公式の作り方

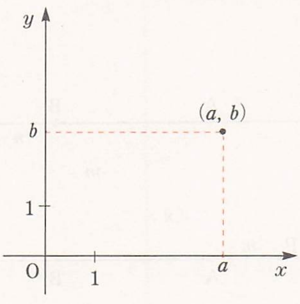
> AB を $m : n$ に外分する点の座標は，形式的に
>
> $-m : n$ に分かつ点
> または　　　　　　　　　　として内分点のときと同じように扱えばよい．
> $m : -n$ に分かつ点

6°　「内分点」，「外分点」を総称して「**分点**」と呼ぶ．

A1.2　平面上の点の座標

I．基礎事項

平面上に直交する 2 本の座標軸，すなわち，x 軸と y 軸とを導入して，平面上の点Pとその座標の組 (x, y) とを対応させる方法については，中学で学んだ．



1°　特にことわらなければ，x 軸を横軸，y 軸を縦軸にとり，x 軸は右方を正の向き，y 軸は上方を正の向きにとる．また，普通は x 軸上の単位の長さと y 軸の単位の長さとは同じにする．

a を x 座標，b を y 座標とする点Pを，

$\mathrm{P}(a, b)$，点 (a, b)，または，単に (a, b)

と表すことも中学で学んだ．

(1) 象　限

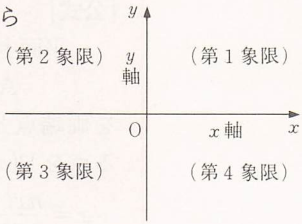
座標がきめられた平面が **座標平面** である。

座標平面は座標軸によって 4 つの部分に分けられる。これらの部分を右の図のようにそれぞれ

第 1 象限,　　**第 2 象限**

第 3 象限,　　**第 4 象限**

という。



1°　どの象限も境界の座標軸は含まないのと考えるが普通である。

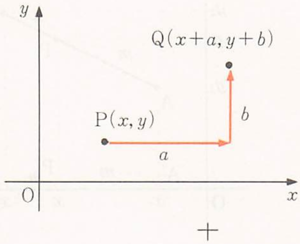
(2) 平行移動と座標

点 $P(x,\ y)$ を x 軸方向に a だけ，y 軸方向に b だけ，平行移動した点をQとすれば，

$Q(x+a,\ y+b)$

である。

2°　ここで，a, b が負である場合には，実質的に，それぞれ x 軸，y 軸の負の方向，つまり，左方向，下方向への平行移動になる。



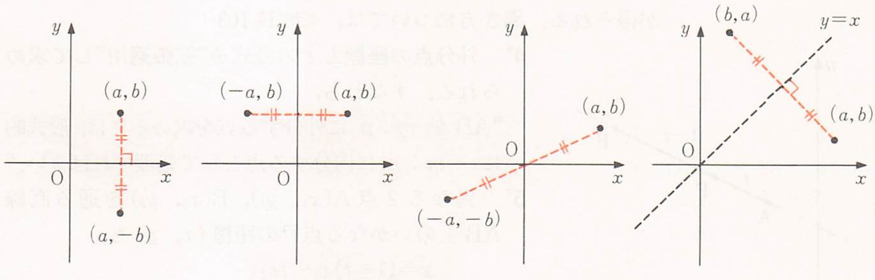
(3) 対称な点の座標

点 $(a,\ b)$ の x 軸に関して対称な点は，点 $(a,\ -b)$ である。

点 $(a,\ b)$ の y 軸に関して対称な点は，点 $(-a,\ b)$ である。

点 $(a,\ b)$ の原点に関して対称な点は，点 $(-a,\ -b)$ である。

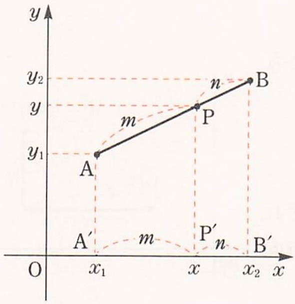
点 $(a,\ b)$ の直線 $y=x$ に関して対称な点は，点 $(b,\ a)$ である。



II.　平面上の2点の内分点，外分点

平面上の分点の座標

[公式]
　平面上の2点
$$A(x_1,\ y_1),\ B(x_2,\ y_2)$$
を両端点とする線分ABを $m:n$ に内分する点を $P(x,\ y)$ とすると
$$x=\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\quad y=\frac{ny_1+my_2}{m+n}$$



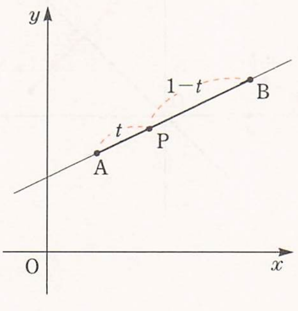
1°　点Pが線分ABを $m:n$ に内分しているとき，3点A, B, Pから x 軸に下した垂線の足（垂線と x 軸との交点）をA′, B′, P′とおくと，点P′は線分A′B′を $m:n$ に内分する．これらに数直線上の分点の座標の公式を適用すれば，上の公式の x 座標の部分が得られる．（左図）
　y 座標についても同様．

2°　$m=n=1$ とおくと中点の公式となる．

中点の座標

[公式]　2点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ の中点は
$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

3°　上の公式をさらに応用すると，3点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，$C(x_3,\ y_3)$ を頂点とする三角形の **重心** Gの座標を表す公式
$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$
が得られる．導き方については，☞B.103



4°　外分点の座標も上の公式を“拡張適用”して求められる．すなわち，
“ABを $m:n$ に外分する点を求めるには，形式的に $-m:n$ に内分する点として処理すればよい．”

5°　異なる2点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ を通る直線AB上のいかなる点Pの座標 $(x,\ y)$ も，
$$x=(1-t)x_1+tx_2$$
$$y=(1-t)y_1+ty_2$$
と表される（t はある実数）．

これは，分点の公式で

$$t=\frac{m}{m+n}$$

とおいたものである．

$$\begin{cases} t=0 & \text{のときは，PはAに一致} \\ t=1 & \text{のときは，PはBに一致} \\ 0<t<1 & \text{のときは，Pは線分AB上にある} \\ t<0 & \text{のときは，Pは線分BAの延長上にある} \\ t>1 & \text{のときは，Pは線分ABの延長上にある} \end{cases}$$

Ⅲ.　平面上の2点間の距離

2点間の距離

［公式］　平面上の2点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ の間の距離は

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

とくに，原点 $O(0,\ 0)$ と点 $P(x,\ y)$ の間の距離は

$$OP=\sqrt{x^2+y^2}$$

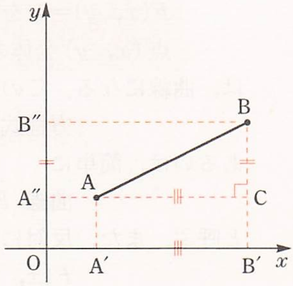
1°　A，Bから x 軸，y 軸に下した垂線の足を，それぞれ

A′，B′；A″，B″

とおけば

$$\begin{cases} A'B'=|x_2-x_1| \\ A''B''=|y_2-y_1| \end{cases}$$

となることに注意すれば，この式は，“三平方の定理”にほかならない．実際，右図で



$$AB^2=AC^2+BC^2$$
$$=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2$$
$$=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$
$$\therefore\quad AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

2°　一般に，$(a-b)^2=(b-a)^2$ であるから，上の公式を

$$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

と書いてもよい．要するに，

$$\sqrt{(x\text{ 座標の差})^2+(y\text{ 座標の差})^2}$$

を考えればよいわけである．

A1.3 平面上の曲線の方程式

x, y についての1次方程式, たとえば, $2x+3y-1=0$ を考えると, これは

$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$$

と書き直せる. 中学で学んだように, これは傾き $-\frac{2}{3}$, y 切片 $\frac{1}{3}$ の直線を表す. つまり方程式 $2x+3y-1=0$ を満足する x, y を座標にもつ点 (x, y) の集合がこの直線となるのである.

x, y についての方程式は, 上記のような1次方程式のほかに

$$x^2+y^2=1,\ y=x^2,\ \cdots\cdots$$

など, さまざまな形のものがあるが, いずれも, 適当に整理すれば, 右辺が0の形に変形できる. そこで, x, y についての方程式は, つねに

$$F(x, y)=0$$

と表すことができる.

一般的にいえば, x, y についての方程式 $F(x, y)=0$ が与えられたとき

> $F(x, y)=0$ を満たす x, y を座標にもつ点 (x, y) 全体の集合

は, 曲線になる. この曲線のことを,

方程式 $F(x, y)=0$ の **グラフ**

あるいは, 簡単に

曲線 $F(x, y)=0$

と呼ぶ. また, 反対に, 方程式

$$F(x, y)=0$$

のことを, この **曲線の方程式** という.

1° このような場面で, "曲線"というとき, 直線もその一種と見なしている.

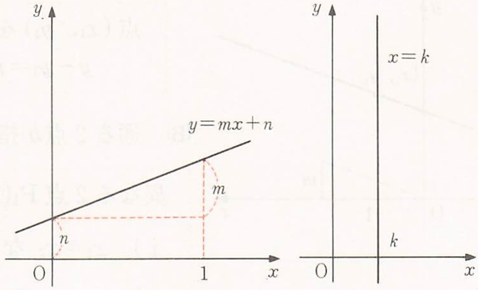
2° $F(x, y)$ の与えられ方によっては, $F(x, y)=0$ のグラフが存在しない (空集合になる) 場合もある.

[例] $F(x, y)=x^2+y^2+1$

3° 以下に見るように, x, y の1次方程式は必ず直線を表し, 逆に, 任意の直線は, x, y についての1次方程式で表される.

A1.4　直線の方程式

Ⅰ．　直線の方程式の一般形



中学で学んだように，

ⅰ）　y 軸に平行でない直線は，
傾きを m，y 切片を n として，
方程式 $y=mx+n$ で表される．

ⅱ）　y 軸に平行な直線の方程式
は x 切片を k として $x=k$ で
表される．

この両者をまとめ，統一的に表すことができる．すなわち

> 直線は，x，y の1次方程式
> $$ax+by+c=0$$
> で表される．

1°　$\begin{cases} a=m,\ b=-1,\ c=n & ととれば，ⅰ） \\ a=1,\ b=0,\ c=-k & ととれば，ⅱ） \end{cases}$

である．

この逆が成り立つことも大切である．すなわち，

> ［定理］　x，y の1次方程式
> $$ax+by+c=0$$
> は直線を表す．

直線の方程式の一般形

1°　「x，y の1次方程式」といえば，"$a=b=0$ ではない"ことが前提とされている．すなわち，a，b のうち，少なくとも一方は0でない．

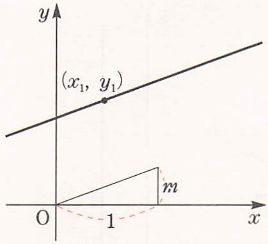
$b\neq0$ のときは，$y=mx+n$ の形に書き直せる．これは y 軸に平行でない直線である．

$b=0$ のときには $a\neq0$ であるから $x=k$ の形に書き直せる．これは y 軸に平行な直線である．

2°　a も b も0のときは，$ax+by+c=0$ は，x，y の1次方程式とは呼べない．このとき方程式 $ax+by+c=0$ は直線を表さない．実際，$c\neq0$ の場合は，この式を満たす点 $(x,\ y)$ は1つもない．$c=0$ なら，すべての点 $(x,\ y)$ がこれを満たすので，この方程式は全平面を表すことになる．

II．指定された直線の方程式を導き出す手順

(A)　通る点と傾きが指定された場合：



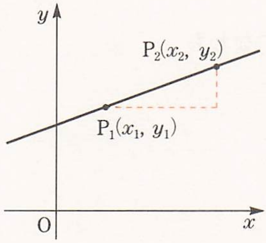
点 $(x_1,\ y_1)$ を通り傾きが m である直線は
$$y-y_1=m(x-x_1)$$

(B)　通る 2 点が指定された場合：

異なる 2 点 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$ を通る直線は

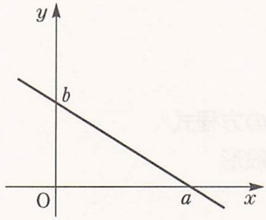
ｉ）　$x_1 \neq x_2$ なら　$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

ii）　$x_1=x_2$ なら　　$x=x_1$



1°　公式(B) ｉ)は形が複雑で覚えにくい．しかし意味がわかれば簡単である．実際，$x_1 \neq x_2$ のときは，直線 P_1P_2 の傾き m が
$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$
で与えられるから，(B) ｉ)は(A)の特別の場合に過ぎない．

(C)　x 切片，y 切片が指定された場合：

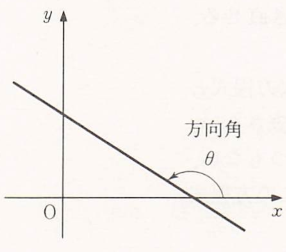


$a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ のとき x 軸と点 $(a,\ 0)$，y 軸と点 $(0,\ b)$ で交わる直線は
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

III．直線の傾きと方向角

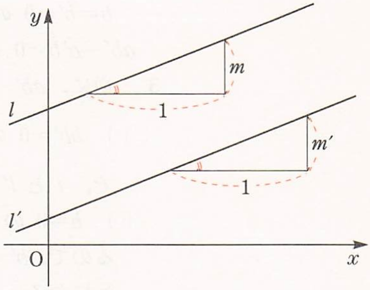
直線が x 軸の正の向きとなす角 θ を，普通左回りに
$$0° \leqq \theta \leqq 180°$$
としてはかり，この直線の **方向角** という．

数学 I で学んだ三角比を用いれば



傾き m の直線の方向角を θ とすると
$$m=\tan\theta$$

IV．　2 直線の平行条件



2 直線

$l：y=mx+n,$

$l′：y=m′x+n′$

が平行 ($l /\!/ l′$) であるための条件は，傾きが等しいこと，すなわち

$m=m′$

となることである．

注意　ここでは，2 直線が一致する (完全に重なる) 場合も，平行の一種と考えて，これに含めて考えている．‘共有点を持たない’という元来の意味での平行に限定するには，

$m=m′$　かつ　$n \fallingdotseq n′$

とすればよいが，このような限定は窮屈である．

これを，前節で述べた直線の方程式の一般形で述べると，次のようになる．

> [定理]　2 直線
>
> $l\ ：ax+by+c=0$
>
> $l′：a′x+b′y+c′=0$
>
> が平行であるための条件は，
>
> $ab′-a′b=0$
>
> となることである．これは，
>
> $\begin{cases} a′=ka \\ b′=kb \end{cases}$
>
> となる定数 k が存在すること，すなわちそれぞれの方程式の x，y の係数の比が等しいことでもある．

1°　$bb′ \fallingdotseq 0$ のときは，“l，$l′$ の傾き $-\dfrac{a}{b}$，$-\dfrac{a′}{b′}$ が等しい”という条件“$-\dfrac{a}{b}=-\dfrac{a′}{b′}$”から“$ab′-a′b=0$”が導かれる．ここで $b′=kb$ とおけば $(ka-a′)b=0$ から，$a′=ka$ となる．

2°　b，$b′$ のうち，一方，たとえば b が 0 のときは，l が y 軸平行になるので，$l /\!/ l′$ となるためには，$l′$ も y 軸平行であるべきである．したがって，$b′$ も 0 でなければならない．

$b=b'=0$ のときには，$a \neq 0$，$a' \neq 0$ であるが，
$ab'-a'b=0$ は成り立つ．

3° 逆に，$ab'-a'b=0$ であるとすると，

i) $bb' \neq 0$ のときは，上の等式を $-\dfrac{a}{b}=-\dfrac{a'}{b'}$ と変形できるので，l と l' の傾きが等しい．よって $l \parallel l'$ である．

ii) $b=0$ のときは，上の等式は $ab'=0$ となるが，$a \neq 0$ であるので，$b'=0$ でなければならない．よって l，l' ともに y 軸平行になる．よって，$l \parallel l'$．

2 直線

$$\boldsymbol{l : y=mx+n}$$
$$\boldsymbol{l' : y=m'x+n'}$$

が一致するための条件は

$$\begin{cases} \boldsymbol{m=m'} \\ \boldsymbol{n=n'} \end{cases}$$

である．これは分かりやすいが，直線の方程式を一般形で扱うときは，間違えやすい．

[定理] 2 直線

$$l : ax+by+c=0$$
$$l' : a'x+b'y+c'=0$$

が一致するための条件は，

$$\begin{cases} a'=ka \\ b'=kb \\ c'=kc \end{cases}$$

となる定数 k が存在すること，すなわち，方程式の係数の比が等しいことある．

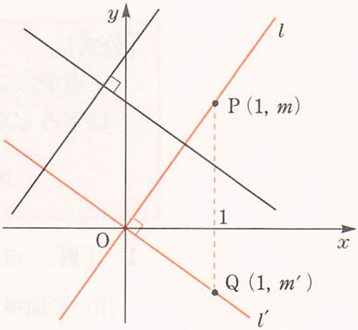
1° （例外的な場合に眼をつむって）分かり易くいえば，上の条件は，

$$a : b : c=a' : b' : c'$$

と表せる．

2° [例] 方程式 $3x-2y+1=0$ と $6x-4y+2=0$ は見た目は違うが同一の直線を表している．

V.　2直線の垂直条件



2直線 $y=mx+n$，$y=m'x+n'$ が垂直になる(直交する)のはどんな場合かを考える．

それには，この2直線を平行移動して，原点を通るようにした2直線 l：$y=mx$，l'：$y=m'x$ が垂直となる条件を求めればよい．

図のように，l，l' 上に x 座標が1である点 P$(1,\ m)$，Q$(1,\ m')$ をとると，△OPQ において，∠POQ=90° の条件から

$$PQ^2=OP^2+OQ^2$$

$$\therefore\quad (m-m')^2=(1+m^2)+(1+m'^2)$$

これを整理すると $mm'=-1$ となる．

つまり，

> 2直線 $y=mx+n$，$y=m'x+n'$ が垂直である
> $\iff mm'=-1$

これを，一般形の場合に書きかえると，次のようになる．

2直線の垂直条件

> [定理]
> 2直線 $ax+by+c=0$，$a'x+b'y+c'=0$ が垂直
> $\iff aa'+bb'=0$

1°　$bb'\neq 0$ のときは，

$$aa'+bb'=0 \iff \frac{aa'}{bb'}+1=0$$

$$\iff \left(-\frac{a}{b}\right)\cdot\left(-\frac{a'}{b'}\right)=-1$$

となり，上で述べた垂直条件と同じである．

2°　b，b' のうち一方，たとえば $b=0$ のときは，$a=0$ でないから，条件 $aa'+bb'=0$ は，$a'=0$ を意味する．つまり，一方が y 軸平行なら，他方は x 軸平行であることになり，確かに垂直である．

VI.　点と直線との距離

[公式]
点 $P(x_0,\ y_0)$ から，直線 $ax+by+c=0$ に下ろした垂線の長さを d とすれば，

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

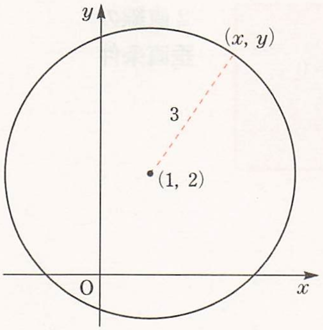
点と直線との距離
この公式の証明は
☞ B.108

1°　例　点 $(3,\ 4)$ と直線 $y=\frac{1}{2}x-1$ との距離 d は，この公式を用いて簡単に求めることができる．まず直線の方程式を $x-2y-2=0$ と変形する．これに上の公式を適用して，

$$d=\frac{|3-2\times4-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|-7|}{\sqrt{5}}=\frac{7}{\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{5}$$

A1.5　円の方程式

I．　円の方程式の標準形



円は，平面において定点からの距離が一定である点の集合である．

たとえば，点 $(1,\ 2)$ と点 $(x,\ y)$ との距離が3であることは，

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=3$$

という等式で表される．したがって，点 $(1,\ 2)$ を中心とする半径3の円の方程式は，

$$(x-1)^2+(y-2)^2=3^2$$

である．一般に，

[公式]　点 $(a,\ b)$ を中心とする，半径 r の方程式は

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \quad \cdots\cdots Ⓐ$$

とくに，原点を中心とする，半径 r の方程式は

$$x^2+y^2=r^2 \quad \cdots\cdots Ⓑ$$

円の方程式

1° Ⓑは，Ⓐにおいて $a=b=0$ とした特別の場合である．逆に，原点を中心とする半径 r の円の方程式Ⓑがわかっていれば，この円を

x 軸方向に a，　y 軸方向に b

ずつ平行移動することにより，点 $(a,\ b)$ を中心とする半径 r の円の方程式Ⓐを導くこともできる．

2° Ⓐは，左辺を展開するなどして整理すると，

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0 \quad \cdots\cdots\cdots Ⓒ$$

(A，B，C は定数)

の形になる．

逆に，このような形の方程式は，必ず，ある円を表すだろうか？

3° $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ の右辺を，x と y それぞれについて平方完成すると

$$(x^2+Ax)+(y^2+By)+C=0$$

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2-\frac{A^2}{4}+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2-\frac{B^2}{4}+C=0$$

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(A^2+B^2-4C) \quad \cdots\cdots\cdots Ⓒ'$$

となる．

4° 例 $x^2+y^2-4x+2y+2=0$ は $(x-2)^2+(y+1)^2=3$ と変形できるので，中心 $(2,\ -1)$，半径 3 の円を表す．

5° しかしⒸが，いつも円を表すとは限らない．Ⓒが実際に円を表す条件は，Ⓒ′の右辺が正，つまり

$$A^2+B^2-4C>0$$

となることである．

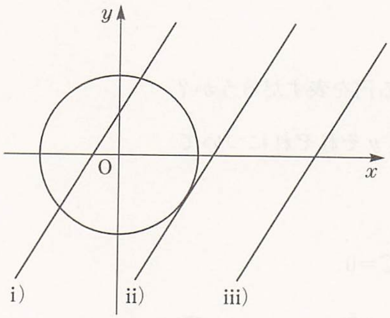
6° $A^2+B^2-4C=0$ のとき，Ⓒを満たす実数 x，y は $x=-\dfrac{A}{2}$，$y=-\dfrac{B}{2}$ のみである．よって，Ⓒは1点 $\left(-\dfrac{A}{2},\ -\dfrac{B}{2}\right)$ を表す．

7° $A^2+B^2-4C<0$ のとき，Ⓒを満たす実数 x，y は存在しない．方程式Ⓒの表す図形は，いわゆる空集合である．

A1.6 2曲線の共有点

I. 円と直線の位置関係(1)

円と直線との共有点の個数は，2，1，0のいずれかである．交点が存在するか，何個あるか，それらの座標はどうなるか，という問いに図に頼ることなく厳密に答えるには，円と直線，それぞれの方程式を連立した方程式の解を考えればよい．



たとえば，

円　$x^2+y^2=5$

直線　$y=2x+k$

の共有点の個数を調べるには，連立方程式

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots\cdots\cdots ① \\ y=2x+k & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

を考え，①，②から y を消去して得られる

$$x^2+(2x+k)^2=5$$

すなわち，x の2次方程式

$$5x^2+4kx+(k^2-5)=0 \qquad \cdots\cdots\cdots ③$$

の解(実数解)の個数をみればよい．共有点の個数については，次のようになる．

③の判別式を D とすると (☞「数学Iニューアプローチ」A1.6)

$$\frac{D}{4}=4k^2-5(k^2-5)=25-k^2$$

i) $D>0$ なら，③は解を2つもち，これに対応して，連立方程式は2組の解をもつ．よって円と直線は異なる2点で交わる．すなわち，共有点は2個である．

ii) $D=0$ なら，③は解を1つもち，これに対応して，連立方程式は唯一の解をもつ．よって円と直線は1点のみを共有する．すなわち，互いに接する．

iii) $D<0$ なら，③は解をもたず，①，②に共有点はない．

II. 円と直線の位置関係(2)

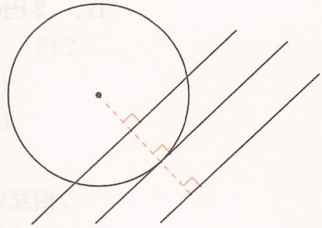
円と直線の位置関係を調べるには，上のように，2次方程式の判別式を利用する方法のほかに，円の中心から直線に下ろした垂線の長さ d と半径とを比較する方法がある．

[定理]　円の中心から，直線に下した垂線の長さを d，円の半径を r とおけば

$d<r \iff$ 異なる2点で交わる

$d=r \iff$ 1点で接する

$d>r \iff$ 共有点をもたない



例　円 $x^2+y^2=1$ の中心$(0,\ 0)$から，直線 $y=2x+k$ に至る距離は，

$$\frac{|k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

である．これと円の半径 $\sqrt{5}$ との大小から

$$\begin{cases} |k|<\sqrt{5} & \text{のときは，2点で交わる} \\ k=\pm\sqrt{5} & \text{のときは，接する} \\ |k|>\sqrt{5} & \text{のときは，共有点をもたない} \end{cases}$$

III.　円と接線の公式

接点が指定された接線について，次の公式がある．

円の接線

[公式]

原点を中心とする円 $x^2+y^2=r^2$ の上の点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式は

$$x_0x+y_0y=r^2$$

例　円 $x^2+y^2=5$ の上の点$(2,\ 1)$での接線は

$$2x+y=5$$

である．

1°　上の公式は，中心が原点以外にある場合まで含んで一般化される．すなわち，

円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の上の点$(x_0,\ y_0)$での接線の方程式は

$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$$

ガイド☆　公式の証明については，☞B.114

IV. 2円の相互の位置関係

2円

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ……… ①

$(x-a')^2+(y-b')^2=r'^2$ ……… ②

(ただし，$r>0$，$r'>0$)

の相互の位置関係(2点で交わる，外接する，……)を判定するだけなら，連立方程式の解を調べるよりも，中心間の距離と半径との関係に注目するのが一般に得策である．

中心$(a,\ b)$，$(a',\ b')$の間の距離dは

$$d=\sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2}$$

であるので，これを，下の関係に代入すればよい．

ただし，iv)においては，$r \neq r'$とする．

[定理] 中心間距離d，半径r，r'の2円について

i) $r+r'<d$ $\iff$ たがいに他の外部にある．

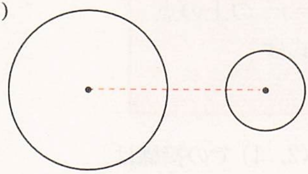
ii) $d=r+r'$ $\iff$ 外接する．

iii) $|r-r'|<d<r+r'$ $\iff$ 2点で交わる．

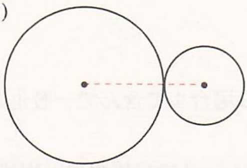
iv) $d=|r-r'|$ $\iff$ 内接する．

v) $|r-r'|>d$ $\iff$ 一方が他方の内部にある．

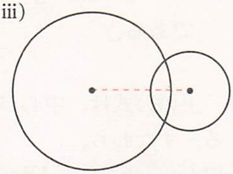
i)



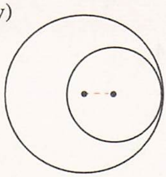
ii)



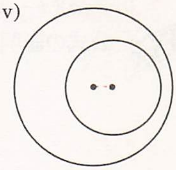
iii)



iv)



v)



A1.7　2円の交点を通る円，直線

一般に，2曲線

$C_1: F(x,\ y)=0,\qquad C_2: G(x,\ y)=0$

が与えられているとき，k を定数として方程式

$F(x,\ y)+kG(x,\ y)=0$

の表す曲線Cの性質を考察しよう．そうすると，曲線Cの形はkによって変わるが，k が何であっても，

“曲線Cは2曲線 C_1，C_2 の共有点(もし存在すれば)を通る”

という注目すべき性質がある．その理由は，

$(\alpha,\ \beta)$ が C_1，C_2 の共有点である

$\Longleftrightarrow$ $F(\alpha,\ \beta)=0$ かつ $G(\alpha,\ \beta)=0$

$\Longrightarrow$ $F(\alpha,\ \beta)+kG(\alpha,\ \beta)=0$

$\Longleftrightarrow$ $(\alpha,\ \beta)$ は曲線C上の点である

つまり，C_1 と C_2 の共有点はC上にある．

となるからである．

この性質を2つの円の場合に適用すると，次が得られる．

[定理]　2円

$x^2+y^2+Ax+By+C=0$　……①

$x^2+y^2+A'x+B'y+C'=0$　……②

において，

①＋②×(−1)

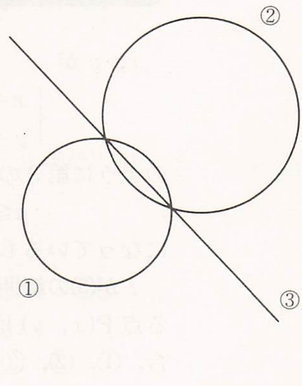
から得られる方程式

$(A-A')x+(B-B')y+(C-C')=0$ …③

は，2円が交わる場合には，2円の共通弦を含む直線(2交点を結ぶ直線)を表す．

2円が接する場合には，2円の接点における共通接線を表す．

2円の共通弦



1°　例　2円 $x^2+y^2=25$　………①

$(x-3)^2+(y-4)^2=1$　………②

において，

中心間距離$=d=5$，半径 $r_1=5$，$r_2=1$

であって，

$$|r_1-r_2|<d<r_1+r_2$$

が成り立つから，この2円は交わっている．

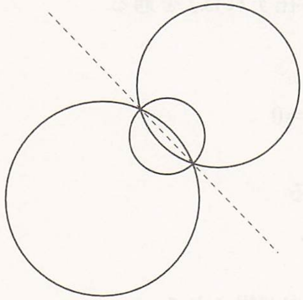
よって，①－②から得られる

$$6x+8y=49 \qquad \cdots\cdots\text{③}$$

は，この2円の共通弦を含む直線の方程式である．

2° 上記[定理]において，2円が共有点をもたないときは，直線③と2円①，②の幾何学的関係については ☞C.3

3° 2円の交点を通る円



2円

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0 \qquad \cdots\cdots\text{①}$$

$$x^2+y^2+A'x+B'y+C'=0 \qquad \cdots\cdots\text{②}$$

が交わるとき，方程式

$$x^2+y^2+Ax+By+C$$
$$+k(x^2+y^2+A'x+B'y+C')=0 \qquad \cdots\cdots\text{③}$$

は，$k \neq -1$ のとき2円①，②の交点を通る円を表す．($k=-1$ のときは，2交点を通る直線)

A1.8 曲線の媒介変数表示*

x，y が

$$\begin{cases} x=f(t) & \cdots\cdots\text{①} \\ y=g(t) & \cdots\cdots\text{②} \end{cases}$$

のように第3の変数 t の関数であり，t の変域が，たとえば

$$a \leqq t \leqq b \qquad \cdots\cdots\text{③}$$

になっているものとする．

t が③の範囲を変わるとき，①，②で定まる x，y を座標とする点 P(x，y) は，xy 平面上のある曲線 C を描く．このような場合，①，②，③を（t を媒介変数とする）曲線 C の **媒介変数表示** という．

1° 例 2点 A(x_1，y_1)，B(x_2，y_2) を相異なる点とする．

$$\begin{cases} x=(1-t)x_1+tx_2 & \cdots\cdots\text{①} \\ y=(1-t)y_1+ty_2 & \cdots\cdots\text{②} \end{cases} \qquad 0<t<1 \quad \cdots\cdots\text{③}$$

を考える．このとき，t を固定すれば，$\mathrm{P}(x,\ y)$ は

線分 AB を　$t:(1-t)$ に内分する点

である．(☞A.1.2Ⅱ)　だから，t が③の範囲を動くと，P は線分 AB(両端を除く) を描くことになる．

すなわち，①，②，③は，線分 AB の媒介変数表示である．

2°　1°で利用したような，①，②で定まる点Pの幾何学的意味がわからない場合でも，次のように考えて，動点Pの描く図形を求めることができる．

t が③の範囲を変化するときに，①，②で表される点$(x,\ y)$の描く図形をLとおくと，L は，

③の満たす適当な t の値を用いて①，②で表されるような点$(x,\ y)$の全体

である．たとえば，1°の 例 において，$x_1 \neq x_2$ であるとする．

x が与えられたとき，①，すなわち $x=x_1+t(x_2-x_1)$

を満たす t は　$t=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$

と表される．よって，この値が，②も③も満たすような$(x,\ y)$の条件，すなわち

$$\begin{cases} y=\left(1-\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)y_1+\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}y_2 & \cdots\cdots\cdots ④ \\ 0<\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}<1 & \cdots\cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

が，P の描く図形を表す，④は，2 点$(x_1,\ y_1)$を通る直線 AB の方程式，⑤は，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が，$\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ の間にあることを表す条件である．

3°　2°で行なったような，媒介変数表示①，②，③から，媒介変数を含まない表現④，⑤を導く変形を

“媒介変数の消去”

と呼ぶ．これは，

ある t に対して，①，②，③が同時に成り立つ

あるいは

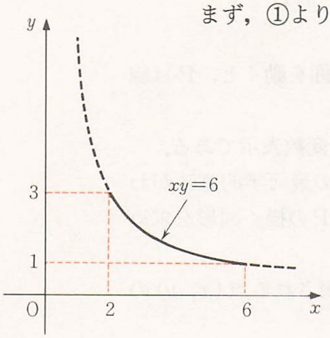
①，②，③をともに満たす t が存在する

ための条件を，t を含まない形で表現する作業である．

4°　例　媒介変数表示

$x=2t$ ………①，　$y=\dfrac{3}{t}$ ………②，　$1 \leqq t \leqq 3$ ………③

によって表される曲線Cをこの考え方で求めてみよう．



まず，①より $t=\dfrac{x}{2}$ ………④

④の t が②と③を満たすべきだから，④を②と③に代入すると，

$$y=\frac{6}{x} \quad \therefore \quad xy=6 \qquad \cdots\cdots⑤$$

$$1 \leqq \frac{x}{2} \leqq 3 \quad \therefore \quad 2 \leqq x \leqq 6 \qquad \cdots\cdots⑥$$

以上より，曲線 C は，直角双曲線⑤の⑥を満たす範囲に含まれる部分である．

5°　パラメタ t を含む2曲線

$$F(x,\ y,\ t)=0 \qquad \cdots\cdots①$$

$$G(x,\ y,\ t)=0 \qquad \cdots\cdots②$$

が与えられ，たとえはパラメタ t が

$$a \leqq t \leqq b \qquad \cdots\cdots③$$

という範囲の値をとるときの **2曲線の交点の軌跡** を求める問題がある．本質的には媒介変数表示された曲線を求めるのと同じ取り扱いにより解決できる．

ガイド　その他，進んだ解決については　☞ A1.13

A1.9 不等式の表す領域

I．基礎事項

たとえば，

$$2-y^2+2x>x^2+2y$$

のように，x，y に関する不等式が与えられるとする．このとき，座標平面において，この不等式を満足する x，y を座標にもつ点 $(x,\ y)$ 全体の集合を，この不等式の表す領域という．

すなわち，

不等式の表す領域＝不等式を満たす点 $(x,\ y)$ 全体の集合

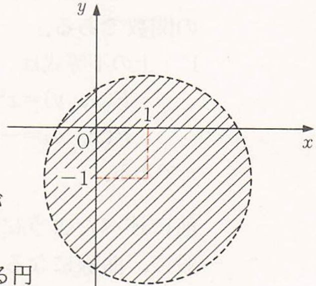
そして，不等式の表す領域を座標平面に図示することを，

“不等式を図示する”　あるいは　“不等式を図解する”

という．

1°　例　上にあげた不等式

$$2-y^2+2x>x^2+2y$$



の表す領域をDとすれば，

$D=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2-2x+2y-2<0\}$

$=\{(x,\ y)\,|\,(x-1)^2+(y+1)^2<2^2\}$

$=\{(x,\ y)\,|\,(1,\ -1)$ と$(x,\ y)$との距離が2より小$\}$

$=$“$(1,\ -1)$ を中心とし，半径が2である円の内部”

2°　上と同様の考察により，$r>0$ のとき

$(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$ の表す領域は
　中心$(a,\ b)$，半径rの円の内部　**円の内部**

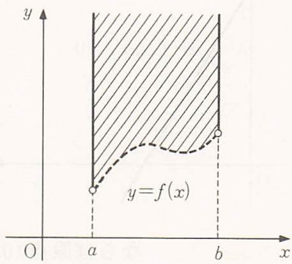
$(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$ の表す領域は
　中心$(a,\ b)$，半径rの円の外部　**円の外部**

3°　習慣として，不等式を図示するときには，求める領域に斜線を付けて示す．

4°　$(x-a)^2+(y-b)^2\leqq r^2$ のように，等号がついた場合には，曲線 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上の点，つまり境界線上の点も含まれることになる．境界のうち，含まれる部分は実線，含まれぬ部分は点線で示すとよい．また，実線と点線の交点など，特に問題となる点は，含まれるときには•で，含まれないときは◦で表す．境界が含まれるかどうかは，言葉でも説明をつけておくとよい．

5°　**関数のグラフと不等式の表す領域**

関数$f(x)$の定義域が $a\leqq x\leqq b$ であるとき，不等式 $y>f(x)$ の表す領域は，$(a\leqq x\leqq b$ なる範囲で$)$ $y=f(x)$ の上方の部分である．



II.　正領域と負領域

$2-y^2+2x>x^2+2y$ が $x^2+y^2-2x+2y-2<0$ と変形できたように，x，y についての不等式は，移項により

$$F(x,\ y)<0\quad あるいは\quad F(x,\ y)>0$$

という形に整理できる．$F(x,\ y)$ は，x と y の2変数についての関数である．

1°　上の不等式は

$F(x,\ y)=x^2+y^2-2x+2y-2$ とおけば，$F(x,\ y)<0$

$F(x,\ y)=-x^2-y^2+2x-2y+2$ とおけば，$F(x,\ y)>0$

である．

前に述べたように，$F(x,\ y)$ の値を0とする $(x,\ y)$ 全体は，一般に，曲線になる．

不等式 $F(x,\ y)>0$ の表す領域 D_+，不等式 $F(x,\ y)<0$ の表す領域 D_- は，通常，曲線 $F(x,\ y)=0$ を境界にもつ．D_+ を $F(x,\ y)$ の **正領域**，D_- を $F(x,\ y)$ の **負領域** という．

1°　例　$F(x,\ y)=x^2+y^2-1$ とすると，

$F(x,\ y)$ の正領域は，円 $x^2+y^2=1$ の外部

$F(x,\ y)$ の負領域は，円 $x^2+y^2=1$ の内部

である．

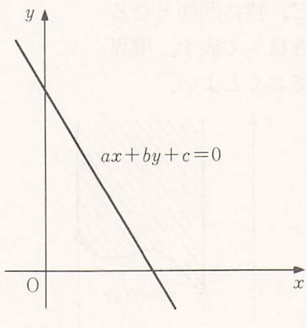
2°　例　$G(x,\ y)=1-x^2-y^2$ とすると，

$G(x,\ y)$ の正領域は，円 $x^2+y^2=1$ の内部

$G(x,\ y)$ の負領域は，円 $x^2+y^2=1$ の外部

である．

3°　**1次不等式の表す領域**



a，b の少なくとも一方は0でないとして，

$F(x,\ y)=ax+by+c$

とおく．このとき，平面は直線

$F(x,\ y)=0$

によって2つの部分に分けられる．

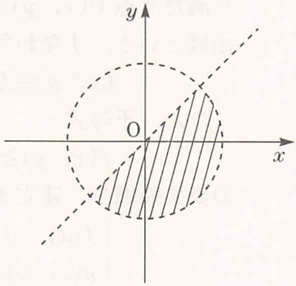
その一方の側は $F(x,\ y)$ の正領域である．

他の側は $F(x,\ y)$ の負領域である．

実際に，ある側が正領域であるか，負領域であるかを判定するには，どちらかに代表点をとって調べればよい．代表点としては，$c\neq 0$ ならば原点 $(0,\ 0)$ が便利である．$F(0,\ 0)=c$ であるから $c>0$ のときは，原点を含む方が正領域，含まない方が負領域である．$c<0$ なら反対になる．　$c=0$ ならば，座標軸上の適当な点を代表点にとって調べればよい．

III.　連立不等式の表す領域

2つの不等式を同時にみたすような点の集合は，その各不等式の表す2つの領域の共通部分(交わり)である．これを**連立不等式の表す領域**という．



1°　例　$x^2+y^2<1$ かつ $y<x$ の表す領域は，原点を中心とする半径1の円の内部で，直線 $y=x$ の下側にある部分(半円の内部)である．

A1.10　図形と式の関係(反省)

I.　方程式と図形

x と y についての方程式

$$f(x,\ y)=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たす点 $P(x,\ y)$ の全体が作る図形 C を，点Pの描く軌跡といい，①を図形 C の方程式という．

すなわち

$$(x,\ y)\in C \iff f(x,\ y)=0$$

したがって大切なポイントは

同値な方程式は同じ図形を定める

ということである．

1°　例　方程式 $2x+3y=1$ と $y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$ は互いに同値であり，同じ直線を表す．

2°　例　2点 A(0, 0), B(1, 1) に対し，$P(x,\ y)$ が A, B から等距離にある条件は，

$$x^2+y^2=(x-1)^2+(y-1)^2$$

である．この方程式は

$$x+y=1$$

と同値である．実際点Pの描く軌跡は AB の垂直二等分線である．

II．　不等式と図形

x と y についての不等式

$$f(x,\ y)>0 \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の全体が作る図形 D を，不等式②が表す領域という．すなわち

$$(x,\ y)\in D \iff f(x,\ y)>0$$

また，不等式

$$f(x,\ y)\geqq 0$$

の表す領域や，連立不等式

$$\begin{cases} f(x,\ y)>0 \\ g(x,\ y)\geqq 0 \end{cases}$$

が表す領域なども，同様に定義する．

同値な不等式は，同じ領域を表す

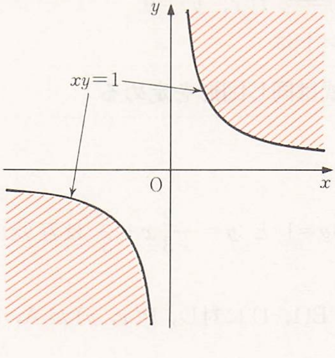
例　不等式

$$xy\geqq 1 \qquad \cdots\cdots\cdots ③$$

は，

$$\begin{cases} y\geqq \dfrac{1}{x} \\ x>0 \end{cases} \text{または} \begin{cases} y\leqq \dfrac{1}{x} \\ x<0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots ④$$

と同値である．したがって，③と④は同じ領域を表す．



領域を不等式で表す方法はいろいろある．

A1.11　領域のパラメタ表示

I．　不等式

$$a\leqq s\leqq b \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

$$c\leqq t\leqq d \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

が表す st 平面上の領域を F とする．点 $(s,\ t)$ が F の上を動くとき，

$$x=f(s,\ t) \qquad \cdots\cdots\text{③}$$
$$y=g(s,\ t) \qquad \cdots\cdots\text{④}$$

で与えられる点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を考え，$s,\ t$ が①，②を満たしながら動いたとき点 P の動く領域を D とする．このとき，

点 $(x,\ y)$ が D に属する．
$\Longleftrightarrow$ ①，②，③，④を満たす実数 $s,\ t$ が存在する．

という関係が成立する．これを用いて，領域 D を再現することができる．

例　不等式

$$\begin{cases} -1\leqq s\leqq 1 & \cdots\cdots\text{⑤} \\ -1\leqq t\leqq 1 & \cdots\cdots\text{⑥} \end{cases}$$

が定める st 平面上の領域を F の上を動くとき，

$$\begin{cases} x=s+t^2 & \cdots\cdots\text{⑦} \\ y=s-t^2 & \cdots\cdots\text{⑧} \end{cases}$$

で与えられる点 $(x,\ y)$ の動く領域 D を求める．⑤，⑥，⑦，⑧で満たす $s,\ t$ が存在する条件は

$$\begin{cases} -1\leqq \dfrac{1}{2}(x+y)\leqq 1 \\ 0\leqq \dfrac{1}{2}(x-y)\leqq 1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} -2\leqq x+y\leqq 2 \\ 0\leqq x-y\leqq 2 \end{cases}$$

であり，これが領域 D を与える．

II.　上記のＩの③，④を，点 $(s,\ t)$ を点 $(x,\ y)$ に移す手続きであると考えよう．このように点を移す手続きを写像という．すると，Ｉで考えた問題は，長方形をこの写像③，④で移すことであったと言える．

1°　軌跡や領域を求める方法（☞A1.11 のＩ）と関数の値域を求める方法（☞B.137，B.138）はよく似ている．関数 $f(x)$ は数直線上の点 x を数直線上の点 y に移す写像であり，2 変数関数 $z=f(x,\ y)$ は平面上の点 $(x,\ y)$ を数直線上の点 z に移す写像であるから，似ているのは当然のことと言える．

A1.12 曲線族と軌跡

I． パラメタ t とともに xy 平面上を動く 2 本の曲線

$$f_t(x,\ y)=0 \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$
$$g_t(x,\ y)=0 \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

がある．この 2 曲線の交点 $(x,\ y)$ が描く軌跡を C とすると，

$$(x,\ y)\in C \iff ①,\ ②\text{を満たす } t \text{ が存在する}$$

が成立する． t の変域が制限されているときも同様である．

[例] 条件 $\begin{cases} x+y=t & \cdots\cdots\cdots ③ \\ x-y=t & \cdots\cdots\cdots ④ \end{cases}$

を満たす t が存在する条件は

$$x+y=x-y$$
$$\therefore\quad y=0 \qquad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

である．よって， t が実数全体を動くとき，2 直線③，④の交点の描く軌跡は，直線⑤である．

II． パラメタ t とともに動く xy 平面上の曲線

$$f_t(x,\ y)=0 \qquad \cdots\cdots\cdots ⑥$$

が通過する領域を D とすると，

点 $(x,\ y)$ が D に属する
$\iff$ ⑥を満たす t が存在する．

が成立する． t の変域が制限されているときも同様である．

1° [例] 条件 $y=x+t \qquad \cdots\cdots\cdots ⑦$

を満たす正の数 t が存在する条件は

$$y-x>0 \qquad \cdots\cdots\cdots ⑧$$

である．したがって， t が $t>0$ の範囲を動くとき直線⑦の通過する領域は⑧で与えられる．

2° ⑥において， t を時刻とし，曲線⑦（例えば，桜前線など）が時間とともに動くと考えよう．点 $(x,\ y)$ がこの曲線の通過領域（桜の咲く地域）に属するということは，曲線⑥がその点を通過する時刻 t が存在するということである．

A1.13　解析的方法と幾何的方法

I.　ある与えられた条件Pを満たして動く点の描く軌跡を求めるということは，条件Pをわかり易く言い換えること，すなわち，条件の単純な表現を得ることである．

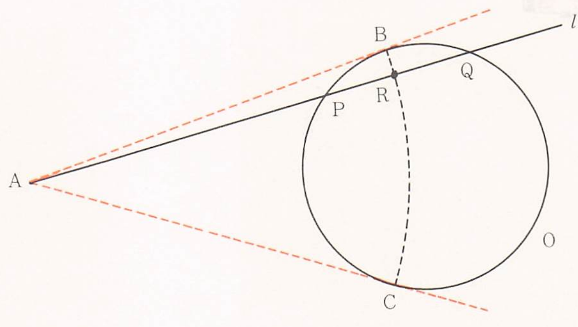
そのために，条件Pを方程式で表し，方程式の同値変形を利用して単純化する方法（解析的方法）を上に述べたのである．

しかし，与えられた条件Pを方程式で表さずに，直接の幾何学的な推論によって言い換える方法（幾何的方法）がある．その例を以下に述べよう．

II.　円Oの外部に点Aをとる．Aを通ってOと2点で交わる直線lを考え，2交点をP，Qとする．このとき線分PQ上に点Rをとって

$$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}=\mathrm{AR}^2 \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

が成立するようにする．直線lを動かしたとき，点Rの描く軌跡は何か，という問題を考える．



この軌跡を調べるために，Aを通る円Oの接線（2本ある）が円Oと接する点をB，Cとする．このとき

$$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}=\mathrm{AB}^2 \quad (=\mathrm{AC}^2)$$

が成立する（方べきの定理☞「大学への数学Aニューアプローチ」A3.4 II，B.113[注]）から，与えられた条件①は

$$\mathrm{AR}=\mathrm{AB} \quad (=\mathrm{AC}) \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

と同値である．

よって点Rは，②を満たしながら(円Oの内部を)動く．すなわち点Rの描く軌跡は，A を中心として B，C を端点とする円弧 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ である．

1°　式②は，A を中心として B，C を通る円の上に点Rがあることを意味する．しかし点Rはこの円全体を動くのではなく，その一部分である円弧 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ を描く．このような点 B，C を軌跡の限界ということがある．

上記の問題は，「解析的方法」を用いても解くことができる．

ガイド☆　☞ B. 127

——A1　おわり——



Repos

関数のグラフなのか／方程式のグラフなのか？

直線のグラフを最初に学んだのは中学校1年生のときだったと思います．思い出して見ると，一番初めは，正比例 $y=ax$ のグラフ，そしてこれを y 軸方向にずらした1次関数 $y=ax+b$ のグラフでした．だから，勾配 a は変数 x が1増加すると，それに伴なって y がそれだけ増加する量，つまり x，y の変化の割合だったのです．

ところが，数学IIでは，「x，y の1次方程式が直線を表す」ことを学びました．

——関数のグラフ／方程式のグラフ——

一体どちらが正しいのでしょう？

結論からいえば，どちらでもいいのです．

「随分，いい加減！」という印象をもつ読者もいるかもしれませんが，

$$y=ax+b$$

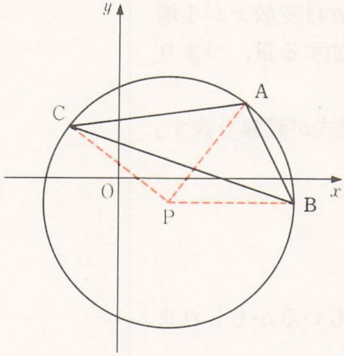
において，これを，独立変数 x の値の変化に伴って，関数値（従属変数）y の値を定める式と見れば，前者の立場，それに対して，x，y を“同格の”変数と見れば，x と y についての方程式というわけです．



B.101

3点 A(5, 3), B(7, −1), C(−2, 2) から等距離にある点Pの座標を求めよ．

アプローチ 点Pの座標を $(x,\ y)$ とおき，3点A，B，Cからの距離が等しいという条件を，x，y の方程式に翻訳するだけで解決します．



解答 $P(x,\ y)$ とおくと，点Pから点A，B，Cまでの距離が等しいという条件は，

$$\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-7)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}$$

$$\therefore \begin{cases}(x-5)^2+(y-3)^2=(x-7)^2+(y+1)^2 & \cdots①\\(x-7)^2+(y+1)^2=(x+2)^2+(y-2)^2 & \cdots②\end{cases}$$

と表現できる．①，②をそれぞれ整理すると，

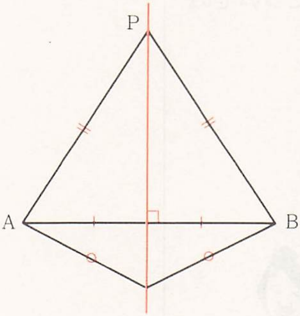
$$\begin{cases}x-2y-4=0 & \cdots\cdots③\\3x-y-7=0 & \cdots\cdots④\end{cases}$$

となる．③かつ④の解は，

$$\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$$ であるので，

点Pの座標は **P(2, −1)** である．

［注］ 1° 3点A，B，Cから等距離にある点Pは，△ABCの外心である．ところで，①は，2定点A，Bから点 $P(x,\ y)$ が等距離にあるという条件に他ならないので，③は線分ABの垂直二等分線を表す．同様に，④は線分BCの垂直二等分線を表すので，上の解答は，それらの交点(垂直二等分線の交点)として，△ABCの外心Pを決定していることになる．



2° また，3点A，B，Cを通る円(外接円)の中心(外心)として，点Pの座標を求めるという方法も考えられる．すなわち，3点A，B，Cを通る円の方程式を

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

とおき，これが3点A，B，Cを通ることから a，b，c の連立方程式

$$\begin{cases}5a+3b+c=-34\\7a-b+c=-50\\2a-2b-c=8\end{cases}$$

を導き，これを解けばよい．

B.102

(1)　△ABC において，辺 BC の中点をMとするとき，

$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$　**[パッポスの中線定理]**

が成立する．これを座標を用いて証明せよ．

(2)　△ABC の重心をGとするとき，

$AB^2+BC^2+CA^2=3(GA^2+GB^2+GC^2)$

が成立する．(1)を用いて，これを示せ．

アプローチ　(1)では，座標軸をうまく設定することを考えます．

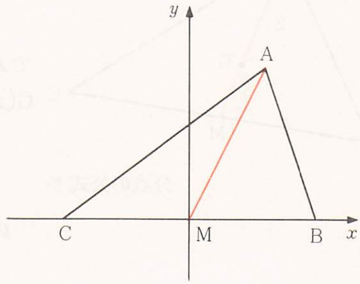
解答　(1)　右図のように，Mを原点に BC が x 軸上にのるように座標軸をとると

$A(a,\ b),\ B(c,\ 0),\ C(-c,\ 0)$

とおける．すると，

$$\begin{cases} AB^2+AC^2=\{(a-c)^2+b^2\}+\{(a+c)^2+b^2\} \\ \qquad\qquad\quad =2(a^2+b^2+c^2) \\ AM^2+BM^2=(a^2+b^2)+c^2 \end{cases}$$

$\therefore\ \ AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$ ■



(2)　BC の中点をMとすると，(1)で証明した中線定理により

$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$　………　①

が成り立つ．また，

$AM=\dfrac{3}{2}GA,\ BM=\dfrac{1}{2}BC$

◀ G は △ABC の重心なので AM : GA =3 : 2

であるので，これを①の右辺に代入することにより

$AB^2+AC^2=\dfrac{9}{2}GA^2+\dfrac{1}{2}BC^2$　………　②

を得る．同様にして，

$BC^2+CA^2=\dfrac{9}{2}GC^2+\dfrac{1}{2}AB^2$　………　③

$AB^2+BC^2=\dfrac{9}{2}GB^2+\dfrac{1}{2}CA^2$　………　④

が導かれるので，②+③+④ より，

$AB^2+BC^2+CA^2=3(GA^2+GB^2+GC^2)$

を得る．■

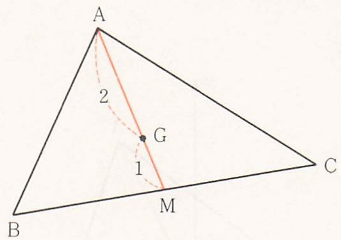
[注]　(2)も，(1)のように座標を用いて証明することができる．

B.103

(1)　3点 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$ を頂点とする三角形ABCの重心Gの座標を求めよ．

(2)　△ABCの辺BC, CA, ABを $m:n$ に内分する点をそれぞれD, E, Fとするとき，△ABC，△DEFの重心は一致することを示せ．

アプローチ　△ABCの重心Gは，BCの中点Mに対し，線分AMを2：1の比に内分する点です．



解答　(1)　辺BCの中点Mの座標は

$$M\left(\frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2}\right)$$

であり，線分AMを2：1に内分する点が，重心 $G(x,\ y)$ であるから，

分点の公式 ▶

$$x=\frac{x_1+2\cdot\dfrac{x_2+x_3}{2}}{3}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

y 座標についても同様なので，

$$\mathbf{G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)}$$

を得る．

(2)　$A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$ とすると，分点D, E, Fの x 座標 x_D, x_E, x_F

分点の公式 ▶

は，$x_D=\dfrac{nx_2+mx_3}{m+n}$, $x_E=\dfrac{nx_3+mx_1}{m+n}$,

$x_F=\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n}$　となる．

よって，△DEFの重心G′の x 座標 $x_{G'}$ は，

(1)の重心の公式 ▶

$$x_{G'}=\frac{x_D+x_E+x_F}{3}$$

$$=\frac{(nx_2+mx_3)+(nx_3+mx_1)+(nx_1+mx_2)}{3(m+n)}$$

$$=\frac{(m+n)(x_1+x_2+x_3)}{3(m+n)}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

となり，△ABCの重心Gの x 座標に一致する．

y 座標についても同様である．よって，重心G′と重心Gは一致する．■

B.104

2直線　$ax+(a+2)y+2=0$　………　①

　　　$x+ay+1=0$　………　②

(1)　一致する

(2)　平行だが一致しない

(3)　垂直である

のは，それぞれaがどんな値のときか．

アプローチ

2直線 $l_1：a_1x+b_1y+c_1=0$, $l_2：a_2x+b_2y+c_2=0$ について

$$l_1 /\!/ l_2 \iff a_1b_2-a_2b_1=0$$

$$l_1 \perp l_2 \iff a_1a_2+b_1b_2=0$$

である．

解答　(1)　2直線①，②が一致するのは，x，yの方程式①，②の係数が比例するとき，つまり

$$\frac{a}{1}=\frac{a+2}{a}=\frac{2}{1}$$

のときである．これを変形すると，

$$a^2=a+2 \quad かつ \quad a+2=2a$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a=2}$$

となる．

(2)　2直線①，②が平行になるのは

$$a\cdot a-(a+2)\cdot 1=0$$

のときである．これを計算すると，

$$\therefore \quad (a-2)(a+1)=0$$

$$\therefore \quad a=2 \quad または \quad a=-1$$

となるが，①，②が一致しないことから

$$\boldsymbol{a=-1}$$

だけが求めるべきものである．

◀一致する場合を平行に含めることも多い．

(3)　2直線①，②が垂直になるのは

$$a\cdot 1+(a+2)\cdot a=0$$

$$\therefore \quad a(a+3)=0$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a=0} \quad または \quad \boldsymbol{a=-3}$$

のときである．

B.105

a を定数として，直線

$$(1-a)x+(1+a)y+2a-6=0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

について考える．

(1) 直線①が点 A(2, −3) を通るように a の値を定めよ．

(2) 直線①は，a の値によらず定点Pを通ることを示し，その点Pの座標を求めよ．

アプローチ (2)では，①を a について整理するのがポイント．

解答 (1) 直線①が点 A(2, −3) を通るのは，

$$(1-a)\cdot 2+(1+a)\cdot(-3)+2a-6=0$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a=-\frac{7}{3}}$$

のときである．

▶ $x=2$，$y=-3$ を①に代入した．

(2) a の値によらず①を成立させる (x, y) を調べるために，①を a について整理すると

$$(x+y-6)+a(-x+y+2)=0 \quad \cdots \quad ①'$$

となる．①′が，a の値によらず成立するのは，

▶ $0+a\cdot 0=0$ はいかなる a の値に対しても成立する．

$$\begin{cases} x+y-6=0 & \cdots\cdots\cdots \quad ② \\ -x+y+2=0 & \cdots\cdots\cdots \quad ③ \end{cases}$$

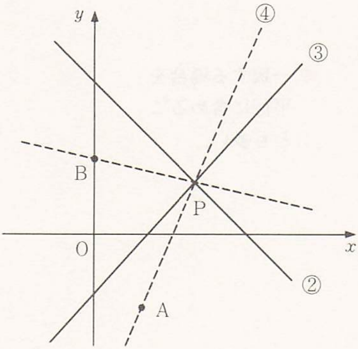
$$\therefore \quad (x, y)=(4, 2)$$

のときである．ゆえに，直線①は，a の値によらず定点 **P(4, 2)** を通る． ∎

［注］ (1)で求めた a の値を①に代入すると，

$$5x-2y=16 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ④$$

という直線が得られる．(2)で，直線①は，a の値によらず2直線②，③の交点Pを通ることを示したので，この直線④は，2点A，Pを通る直線に他ならない．



さらに，直線①が点Aの代わりに点 B(0, 3) を通るように a の値を定めようとすれば，

$a=\dfrac{3}{5}$ と確定する．

では，①はどんな点でも通るようにすることができるのであろうか，この疑問は，次問 B.106 で明らかになる．

B.106

2直線　$x+y-7=0$　………①

$2x-3y+6=0$　………②

の交点と，原点を通る直線の方程式を求めよ．

アプローチ　①，②を連立して交点を求めておいて，その点と原点とを通る直線として答を出すことができますが，ここでは，前問で学んだことを応用しましょう．

解答　kを定数として，①，②から形式的に

$k(x+y-7)+2x-3y+6=0$　………③

を作ると，これは，x，yの1次方程式なので直線を表し，さらに，③はkの値によらず①，②をともに満たす$(x,\ y)$について成立する．したがって，方程式③は，2直線①，②の交点を通るある直線を表す．

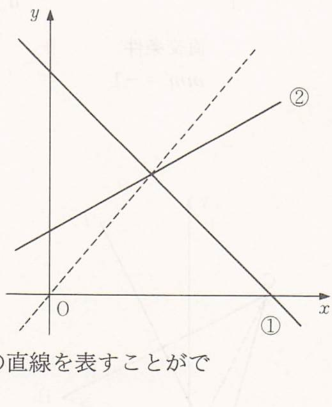
そこで，直線③が，原点O$(0,\ 0)$を通るようなkの値を求めると，

$$-7k+6=0 \qquad \therefore \quad k=\frac{6}{7}$$

となる．よって，これを③に代入して整理して，

$\boldsymbol{4x-3y=0}$

を得る．



[注]　③をkの方程式と見よう．

すると，③は，$x+y-7\neq 0$ であれば，

$$k=-\frac{2x-3y+6}{x+y-7}$$

という唯一の解をもつ．これは直線①上にない点を与えると，方程式③で表される直線でその点を通るものが1本決まることを示している．

したがって，kの値を変化させることにより，③は，2直線①，②の交点を通る①以外の任意の直線を表すことができることがわかる．

また，k，lを$(k,\ l)\neq(0,\ 0)$なる定数として，方程式

$k(x+y-7)+l(2x-3y+6)=0$　………④

を作ると，④は，2直線①，②の交点を通る任意の直線を表すことができる．

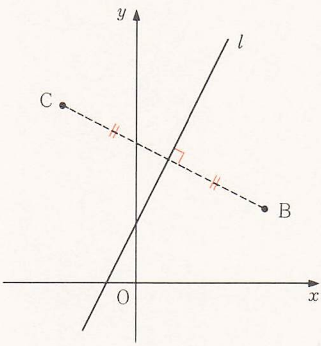
B.107

直線 $l : 2x-y+3=0$ と 2点 A(1, −1), B(5, 3) がある．

(1) 直線 l に関する点Bの対称点Cの座標を求めよ．

(2) 直線 l 上に点Pをとり，AP+PB を最小にする点Pの座標を求めよ．

アプローチ 2点B，Cが直線 l に関して対称になるためには，どんな条件が満たされるべきであるか，と考えます．(2)では，(1)を利用すると鮮やかに解決します．



解答 (1) 点B(5, 3)の直線 l に関する対称点が C(a, b) になるのは

i) 線分BCの中点が l 上にある

かつ

ii) $BC \perp l$

が成り立つときである．

i)の条件は，

$$2\cdot\frac{a+5}{2}-\frac{b+3}{2}+3=0$$

$$\therefore\quad 2a-b+13=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

ii)の条件は，

直交条件 $mm'=-1$

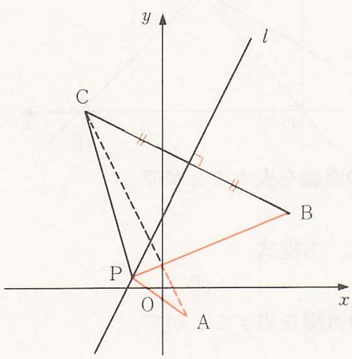
$$\frac{b-3}{a-5}\cdot 2=-1$$

$$\therefore\quad a+2b-11=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

①，②を連立して，

$$\begin{cases} a=-3 \\ b=7 \end{cases}$$

を得る．よって，**C(−3, 7)** である．



(2) $AP+PB=AP+PC$

$\geqq AC$

この等号が成り立つのは，3点A，P，Cが同一直線上に並ぶときである．

つまり，AP+PC は点Pが，直線 l と

直線AC：$y=-2x+1$

との交点 $\left(-\frac{1}{2},\ 2\right)$ に来たとき最小となる．

B. 108

(1)　点 $P(x_0,\ y_0)$ から直線 $ax+by+c=0$ に至る距離 d は

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

で与えられることを証明せよ．

(2)　原点Oと2点 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ を結んでできる△OABの面積 S は

$$S=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$$

で与えられることを証明せよ．

アプローチ (1)は，実直に計算していってもいつかは解決しますが，ちょっとした工夫で労力が倹約できます．

解答 (1)　点 $P(x_0,\ y_0)$ を通り，

直線 $ax+by+c=0$　……… ①

に垂直な直線は

$$b(x-x_0)-a(y-y_0)=0 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

である．そこで，①を

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=-(ax_0+by_0+c) \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

と変形し，$②^2+③^2$ を作ると，

$$(a^2+b^2)\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\}=(ax_0+by_0+c)^2$$

となる．

ところで，2直線①，②の交点 $H(x,\ y)$ に対し

$$d^2=PH^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$$

であるので，

$$d^2=\frac{(ax_0+by_0+c)^2}{a^2+b^2} \quad \therefore \quad d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

を得る．■

◀実数 A に対し $\sqrt{A^2}=|A|$

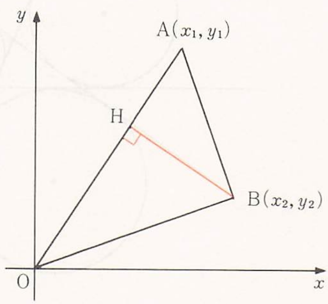
(2)　$B(x_2,\ y_2)$ から，直線　$OA: y_1x-x_1y=0$ に至る距離 BH は

$$BH=\frac{|y_1x_2-x_1y_2|}{\sqrt{y_1{}^2+(-x_1)^2}}=\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}}$$

であるので，

$$S=\frac{1}{2}OA\cdot BH=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$$

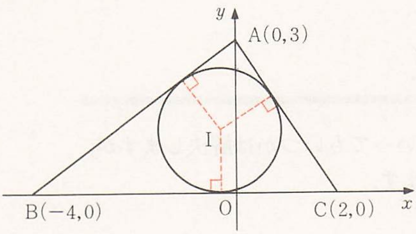
となる．■



B.109

3点 A(0, 3), B(−4, 0), C(2, 0) を頂点とする △ABC の内心 I の座標を求めよ.

アプローチ 三角形の外心，重心の座標を求めることは，すでに学びました.（☞ B.101, 103）今度は内心です. 内心の定義（内接円の中心＝各辺に至る距離が等しい点）に基づいて考えましょう.



解答 内心とは，各辺に至る距離が等しい点である. それぞれの直線の方程式は

AB：$3x-4y+12=0$

BC：$y=0$

CA：$3x+2y-6=0$

であるので，I $(x,\ y)$ とおくと，

$$\frac{|3x-4y+12|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=|y|=\frac{|3x+2y-6|}{\sqrt{3^2+2^2}} \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ.

一方，I は △ABC の内部にあるので，

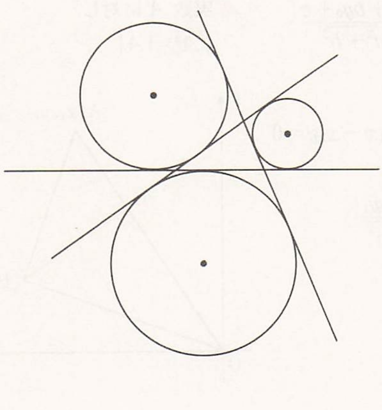
$$\begin{cases} 3x-4y+12>0 \\ y>0 \\ 3x+2y-6<0 \end{cases} \quad \cdots\cdots ②$$

である. ②の下では，①は

$$\begin{cases} 3x-4y+12=5y \\ \sqrt{13}y=-(3x+2y-6) \end{cases}$$

と同値となるので，これらを連立することにより，

$$\mathbf{I}\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2},\ \frac{11-\sqrt{13}}{6}\right) \text{ を得る.}$$

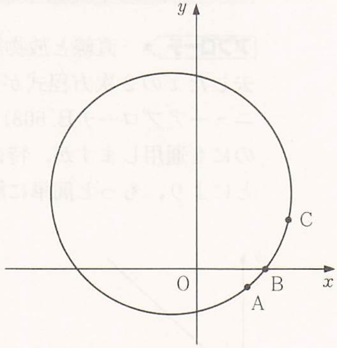


［注］ I が △ABC の内部にあるという条件②を無視して，連立方程式①を解くと，I 以外の3点の座標が得られる. これは，△ABC の外部にあって，1辺と2辺の延長に至る距離が等しい点（△ABC の傍心）である.

B.110

4点A(2, −1), B(3, 0), C(4, 3), D(−1, k)が同一円周上にあるように，定数kの値を定めよ．

アプローチ 3点A, B, Cを通る円上に，点Dがあればよいと考えます．



解答 3点A, B, Cを通る円の方程式を

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

とおくと，定数a, b, cの値は，方程式

$$\begin{cases} 2a-b+c+5=0 \\ 3a+c+9=0 \\ 4a+3b+c+25=0 \end{cases}$$

を満たす．これを解くと，

$$a=2,\ b=-6,\ c=-15$$

となるので，3点A, B, Cを通る円は，方程式

$$x^2+y^2+2x-6y-15=0$$

で表される．

点D(−1, k)がこの円上にあるのは，

$$1+k^2-2-6k-15=0$$

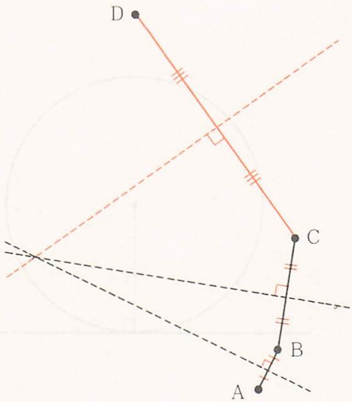
$$\therefore\ k^2-6k-16=0 \quad \cdots\cdots\ ①$$

$$\therefore\ (k-8)(k+2)=0$$

$$\therefore\ \boldsymbol{k=8}\ \text{または}\ \boldsymbol{k=-2}$$

のときである．

［注］ 3点A, B, Cを通る円の中心の座標(x, y)をB.101［注］と同様な方法で求めると，



$$\begin{cases} (x-2)^2+(y+1)^2=(x-3)^2+y^2 \\ (x-3)^2+y^2=(x-4)^2+(y-3)^2 \end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases} x+y-2=0 \\ x+3y-8=0 \end{cases}$$

より，(−1, 3)となる．

そこで，CDの垂直二等分線が，この点を通るようにkの値を決めればよい．

CDの垂直二等分線は

$$(x-4)^2+(y-3)^2=(x+1)^2+(y-k)^2$$

$$\therefore\ 10x+2(3-k)y+k^2-24=0$$

である．これに(x, y)=(−1, 3)を代入すればよい．

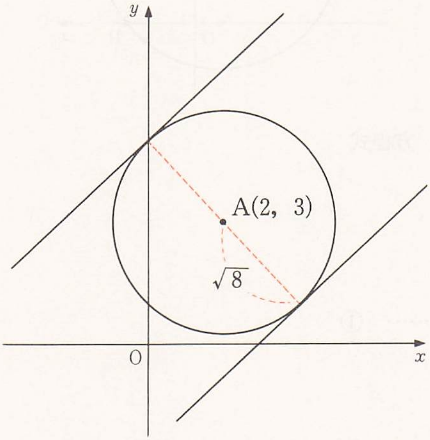
B. 111

直線　$y=x+a$　………　①　が

円　$x^2+y^2-4x-6y+5$　………　②

と接するような実数 a の値を求めよ．

アプローチ　直線と放物線とが接するための条件は，2 式から y を消去した x の 2 次方程式が重解をもつことです．(☞大学への数学Ⅰ ニューアプローチB. 608) この手法は，直線と円が接する条件を求めるのにも通用しますが，特に円の場合，円の幾何学的性質に注目することにより，もっと簡単に解決します．



解答　②は，

$$(x-2)^2+(y-3)^2=8$$

と変形できるので，

円の中心は A(2, 3)，半径は $\sqrt{8}$ である．

よって，直線①が円②と接するためには

$$\begin{pmatrix}\text{中心から直線}\\ \text{に至る距離}\end{pmatrix}=(\text{円の半径})$$

$$\therefore\quad \frac{|2-3+a|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{8}$$

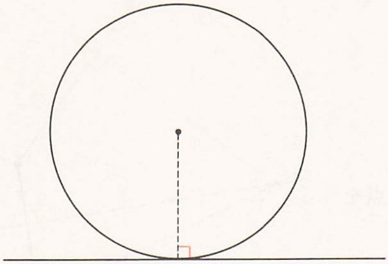
という関係が成り立つことが必要十分である．これを解くと，

$$|a-1|=4$$

$$\therefore\quad a-1=\pm 4$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a=5}\quad \text{または}\quad \boldsymbol{a=-3}$$

を得る．



［注］　ここで用いた円の幾何学的性質とは，

“円の接線は，その接点と円の中心を結ぶ直線に垂直である”

のことである．

B. 112

直線　$y=2x+k$　………　①　　が

(1)　放物線　$y=x^2$　………　②

(2)　円　$x^2+y^2-6y=0$　………　③

によって切り取られる線分の長さが $2\sqrt{5}$ となるような定数 k の値をそれぞれ求めよ。

アプローチ　(1)　①，②から y を消去して得られる x の2次方程式の2実数解が，直線①と放物線②の2交点の x 座標を与えます．(2)も(1)と同じ方針でも解決しますが，前問同様，円の幾何学的性質を利用しましょう．

解答　(1)　①，②が2点P，Qで交わるとき，その2点の x 座標は，①，②から y を消去して得られる x の2次方程式

$$x^2-2x-k=0 \quad \cdots\cdots\cdots \text{④}$$

の2解である．それらを α，β とおくと，2交点P，Qの座標は，

$$P(\alpha,\ 2\alpha+k),\ Q(\beta,\ 2\beta+k)$$

と書ける．

◀放物線②上にあると考えれば
$P(\alpha,\ \alpha^2)$
$Q(\beta,\ \beta^2)$
とおけることになる．

よって，

$$PQ^2=(\alpha-\beta)^2+(2\alpha-2\beta)^2=5(\alpha-\beta)^2$$

となるので，

$$PQ=2\sqrt{5}$$

となる条件は

$$(\alpha-\beta)^2=4$$

$$\therefore\ (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4 \quad \cdots\cdots\cdots \text{⑤}$$

である．

ここで，

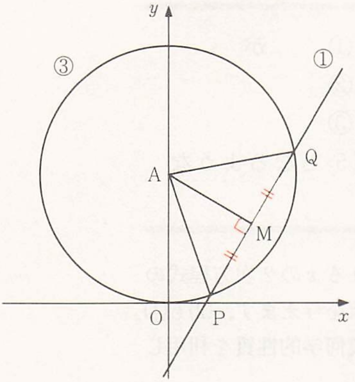
$$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-k \quad \cdots\cdots\cdots \text{⑥}$$

◀解と係数の関係

であるので，⑥を⑤に代入することにより，

$$\boldsymbol{k=0}$$

を得る．



(2) 円③は，

$$x^2+(y-3)^2=9$$

と変形できるので，点A(0, 3)を中心とする半径3の円を表す．

直線①と円③とが2点P，Qで交わるときAから直線①に下ろした垂線の足Mは，線分PQの中点になる．

したがって，$PQ=2\sqrt{5}$ となるのは

$$PM=\sqrt{5}$$

つまり，

$$AP^2-AM^2=PM^2 \quad (\text{三平方の定理})$$

$$\therefore\quad 3^2-AM^2=5 \quad \therefore\quad AM^2=4 \qquad \cdots\cdots ⑦$$

が成り立つときである．

一方，

$$AM=\frac{|k-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$$

であるので，これを⑦に代入して，

$$\frac{(k-3)^2}{5}=4$$

$$\therefore\quad k-3=\pm 2\sqrt{5}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{k=3\pm 2\sqrt{5}}$$

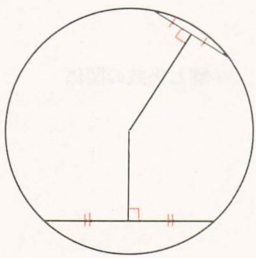
を得る．

[注] 1° (1)において，①，②が異なる2点で交わるための条件

④の判別式$=4(1+k)>0$ ……… ⑧

を合わせて考えなければならないと思う諸君もいるかもしれない．

しかし，条件⑤を考えているときには，この条件⑧は自動的に成り立つので，⑧を連立する必要はない．



2° (2)の解答は，次の円の幾何学的性質に基づいている．

“円の任意の弦に，中心から下した垂線は，その弦を二等分する”

B. 113

定点A(2, 0)を通る直線 $y=m(x-2)$ ……… ① が円 $x^2+y^2=1$ ……… ② と相異なる2点P, Qで交わるとき，積 $\overline{AP}\cdot\overline{AQ}$ の値はmによらず一定であることを示せ．

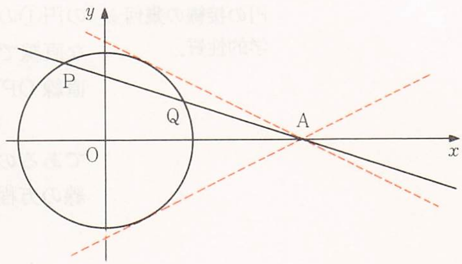
アプローチ 線分の長さを知るには，両端点の座標がわかれば良いわけですが，P, Qの座標を，実際にmの式で表すと，ひどく複雑になってしまいます．文字の上手な使い方をマスターして下さい．

解答 交点P, Qのx座標は，①，②からyを消去して得られるxの2次方程式

$$x^2+(mx-2m)^2=1$$

$$\therefore\quad (1+m^2)x^2-4m^2x+4m^2-1=0 \cdots ③$$

の2解である．



それらをα, βとおくと．P, Qの座標は

$$P(\alpha,\ m(\alpha-2)),\ Q(\beta,\ m(\beta-2))$$

と書ける．よって，

$$\overline{AP}=\sqrt{(\alpha-2)^2+m^2(\alpha-2)^2}=\sqrt{1+m^2}|\alpha-2|$$

◀実は，$\alpha<2$ であるから $|\alpha-2|$ は $2-\alpha$ と計算できる．

同様に，$\overline{AQ}=\sqrt{1+m^2}|\beta-2|$ となるので，それらの積は

$$\overline{AP}\cdot\overline{AQ}=(1+m^2)|(\alpha-2)(\beta-2)|$$
$$=(1+m^2)|\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4|$$

である．ここで，

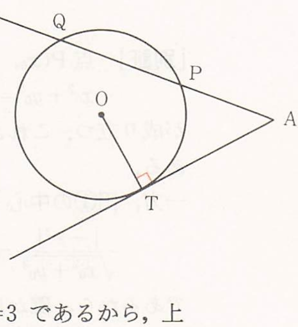
$$\alpha+\beta=\frac{4m^2}{1+m^2},\quad \alpha\beta=\frac{4m^2-1}{1+m^2}$$

◀解と係数の関係

であるから

$$\overline{AP}\cdot\overline{AQ}=(1+m^2)\left|\frac{4m^2-1}{1+m^2}-2\cdot\frac{4m^2}{1+m^2}+4\right|=3$$

となる．ゆえに，積 $\overline{AP}\cdot\overline{AQ}$ の値はmによらず定数3に等しい． ■



[注] 円O外の1点Aから円Oに接線AT，割線APQをひくと

$$\overline{AP}\cdot\overline{AQ}=\overline{AT}^2$$

が成り立つ． **[方べきの定理]**

本問においては，$\overline{AT}^2+\overline{OT}^2=\overline{AO}^2$ より $\overline{AT}^2=3$ であるから，上で得た結果は，確かに方べきの定理と合致している．

B.114

円 $x^2+y^2=r^2$ …… ① 上の点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ における接線は

$$x_0x+y_0y=r^2 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

で与えられることを証明せよ.

アプローチ いろいろな方法があります. いずれにせよ, 円の接線の幾何学的性質をふまえることが基本です.

円の接線の幾何学的性質.

解答 円①の中心は原点Oであり, 点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ での円①の接線は, $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ を通り, 半径 OP に垂直な直線である.

直線 OP の方程式は

$$y_0x-x_0y=0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ③$$

であるので, $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ を通り直線 OP に垂直な直線の方程式は,

$$x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)=0$$

$$\therefore\quad x_0x+y_0y=x_0{}^2+y_0{}^2 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ④$$

となる.

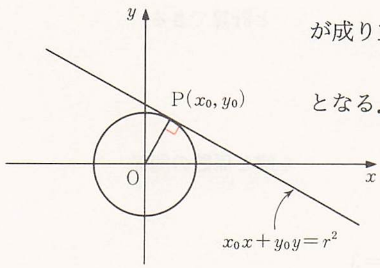
一方, $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ は円①上の点であるので

$$x_0{}^2+y_0{}^2=r^2$$

が成り立つので, ④は

$$x_0x+y_0y=r^2$$

となる. ■



［別証］ 点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ は円①上の点だから

$$x_0{}^2+y_0{}^2=r^2$$

が成り立つ. これより, 直線②が点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ を通ることは明らかである.

一方, 円①の中心 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ から, 直線②に至る距離は

$$\frac{|-r^2|}{\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2}}=\frac{r^2}{\sqrt{r^2}}=\frac{|r|^2}{|r|}=|r|$$

であるから, 確かに円①と直線②とは接する.

ゆえに, 直線②は, 円①の点Pにおける接線である. ■

B.115

2つの円 $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ ………… ①

$x^2+y^2+2x-2y-a=0$ ………… ②

が次の各条件を満たすのは，aがいかなる値のときか．

(1) 外接する． (2) 一方が他方の内部にある．

アプローチ 2円の位置関係は，一般に，2円の中心間の距離と半径との関係で判定できます．

解答 ①，②はそれぞれ

$(x-2)^2+(y+1)^2=4$

$(x+1)^2+(y-1)^2=a+2$

と変形できるので，①は，中心 $C_1(2,\ -1)$ 半径 $r_1=2$ の円，②は，中心 $C_2(-1,\ 1)$，半径 $r_2=\sqrt{a+2}$ の円を表す．また，2円の中心間の距離dは

$d=C_1C_2=\sqrt{13}$

である．

◀②は，$a=-2$ のとき，1点 $C_2(-1,\ 1)$ を表し，$a<-2$ のときは図形を表さない．

(1) 2円が外接するのは，

$d=r_1+r_2$

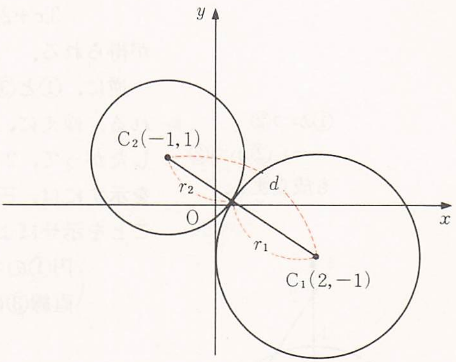
$\therefore\ \sqrt{13}=2+\sqrt{a+2}$

が成り立つときである．これより

$\sqrt{a+2}=\sqrt{13}-2$

$\therefore\ \boldsymbol{a=15-4\sqrt{13}}$

を得る．



(2) $C_2(-1,\ 1)$ は円①の外部にあるから，円①が円②の内部にある場合しかない．

その条件は，

$d<r_2-r_1$

$\therefore\ \sqrt{13}<\sqrt{a+2}-2$ …… ③

が成り立つことである．

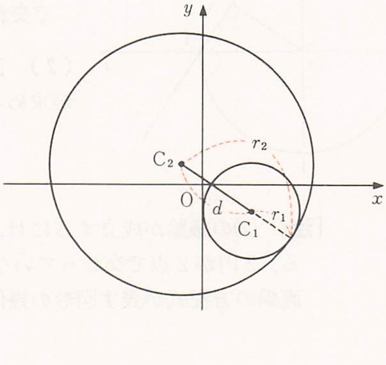
よって，③を解くと

$\sqrt{a+2}>2+\sqrt{13}$

$\therefore\ a+2>(2+\sqrt{13})^2$

$\therefore\ \boldsymbol{a>15+4\sqrt{13}}$

となる．



B.116

2円　$C_1: x^2+y^2=1$ ………　①

$C_2: x^2+y^2-3x-2y+2=0$ ………　②　がある．

(1)　2円 C_1，C_2 は異なる2点で交わることを示せ．

(2)　2円 C_1，C_2 の2交点を通る直線の方程式を求めよ．

アプローチ (1)　2点で交わることを示すには，2交点の座標をわざわざ求める必要はありません．たとえば，2円の中心間の距離 d と2円の半径 r_1，r_2 の間に

$$|r_1-r_2|<d<r_1+r_2$$

が成立していることを示すというのが1つの方針です．解答では別な方法を示しましょう．

(2)　2交点の座標を求めなくとも，その2交点を通る直線の方程式は求められる，というのが本問のポイントです．

解答 (1)　①と②を連立方程式と見て，①−②を作ると，

$$3x+2y-3=0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ③$$

が得られる．

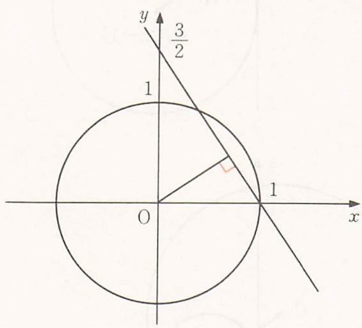
逆に，①と③を仮定すると，①−③から②が得られる．ゆえに，①かつ②は①かつ③と同値である．したがって，2円①，②が異なる2点で交わることを示すには，円①と直線③とが異なる2点で交わることを示せばよいが，

①かつ②
⟺ ②かつ③
も成立する．

$$\begin{pmatrix}\text{円①の中心から}\\ \text{直線③に至る距離}\end{pmatrix}=\frac{|-3|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$<1=(\text{円①の半径})$$

より，確かに円①と直線③は，異なる2点で交わる．■



(2)　直線③は2円の2交点を通るので，③が求めるものである．

［注］ (2)の議論が成立するには，(1)が証明されていることが必要である．2円が2点で交わっていない場合に，上のようにして得られる直線の方程式が表す図形の幾何学的意味については ☞ C.3

B.117

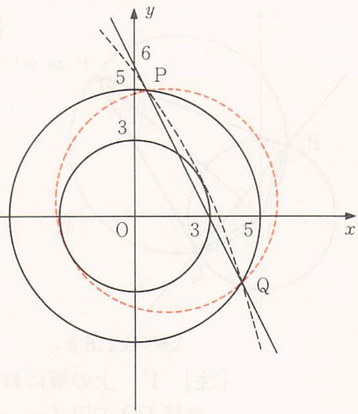
円 $x^2+y^2-25=0$ …… ① と 直線 $2x+y-6=0$ …… ②
の2交点P，Qを通る円で，
円 $x^2+y^2-9=0$ …… ③ に接するものを求めよ．

アプローチ “2交点P，Qを通る円”の方程式をどう表現するかがポイントです．B.106を応用しましょう．

解答 円①と直線②が異なる2点を共有することは自明である．そこで，kを実数として，方程式

$x^2+y^2-25+k(2x+y-6)=0$ … ④

を考える．



①，②をともに満たす$(x,\ y)$は，④も満たすことから，④は，円①と直線②の2交点P，Qを通る円を表す．

そこで，円③と円④が接するようなkの値を求めよう．

ところで，③と④を連立した方程式は④−③から作られる

$2kx+ky-(6k+16)=0$ ……… ⑤

と③を連立したものと同値である．

したがって，2円③，④が接するのは，⑤が直線を表し，それが円③と接するとき，つまり，

$$\frac{|6k+16|}{\sqrt{(2k)^2+k^2}}=3$$

となるときである．これを満たす実数kの値を求めると，　$(6k+16)^2=9\cdot5k^2$

$\therefore\ 9k^2-192k-256=0 \qquad \therefore\ k=\dfrac{16(2\pm\sqrt{5})}{3}$

となる．ゆえに，

$$\boldsymbol{3(x^2+y^2)-75+16(2\pm\sqrt{5})(2x+y-6)=0}$$

が求める円の方程式である．2点P，Qを通り，円③に接するものは，上図の点線に示されるような2つしかないので，これですべて求められた．

[注] 2円③，④が接する条件を，

[③，④の中心間距離]=[③，④の半径の和または差]

を利用して求めてもよい．

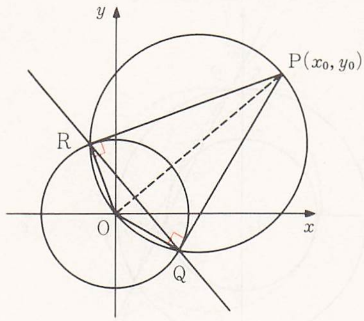
B.118

円 $x^2+y^2=r^2$ の外部の点 $P(x_0,\ y_0)$ からこの円に引いた2本の接線の接点をQ，Rとするとき，直線QRの方程式は

$$x_0x+y_0y=r^2$$

で与えられることを証明せよ．

アプローチ 接点Q，Rの座標を具体的に求めようとすると，繁雑な計算にまきこまれてしまいます．



☞ B.116

解答 $\angle OQP=\angle ORP=90°$ より，Q，Rは，2点OPを直径の両端とする円

$$x(x-x_0)+y(y-y_0)=0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

上にある．一方，Q，Rはもともと円

$$x^2+y^2=r^2 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

上にあったのだから，直線QRは，2円①，②の2交点を通る直線と考えられる．

その方程式は，①と②から，形式的に作られる，②−①，すなわち

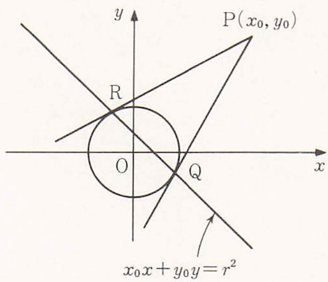
$x_0x+y_0y=r^2$ で与えられる．■

［注］ 1° 上の解において，円①の代りに，点$P(x_0,\ y_0)$を中心とする半径PQの円 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=x_0{}^2+y_0{}^2-r^2$ を考えてもよい．

2° 次の別解は，その単純性と巧妙さによって，極めて有名なものである．理解できたときには，小世界が開かれる気分を味わうことができるだろう．

別解 $P(x_0,\ y_0)$ から引いた2本の接線の接点Q，Rを

$Q(x_1,\ y_1)$，　$R(x_2,\ y_2)$　とする．



直線QP，RPはそれぞれ円周上の点Q，Rでの円の接線であるから，その方程式は

QP：$x_1x+y_1y=r^2 \quad \cdots\cdots ①$

RP：$x_2x+y_2y=r^2 \quad \cdots\cdots ②$

で与えられる．

$P(x_0,\ y_0)$ はこれら2直線の交点であるから，$(x_0,\ y_0)$ は①，②をみたす，つまり，

$$\begin{cases} x_1x_0+y_1y_0=r^2 & \cdots\cdots ③ \\ x_2x_0+y_2y_0=r^2 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

が成り立つ．一方，この③，④は

直線　$x_0x+y_0y=r^2 \quad \cdots\cdots\cdots ⑤$

の上に，2点 $Q(x_1,\ y_1)$，$R(x_2,\ y_2)$ がのっていることを示している．ゆえに，直線⑤が直線QRの方程式に他ならない．

B.119

2定点 A$(a,\ 0)$, B$(-a,\ 0)$ に対し，次の各条件を満たす点Pの描く軌跡をそれぞれ求めよ．ただし a, k, m, n は正の定数である．

(1)　$PA^2-PB^2=k$

(2)　$PA:PB=m:n$

アプローチ　Pの座標が満たすべき式を作ればよいでしょう．

解答　(1)　P$(x,\ y)$ とすると，与えられた条件は

$$(x-a)^2+y^2-\{(x+a)^2+y^2\}=k \qquad \therefore\ x=-\frac{k}{4a}$$

よって，求める軌跡は **直線 $x=-\dfrac{k}{4a}$** である．

(2)　与えられた条件は

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2}:\sqrt{(x+a)^2+y^2}=m:n$$

$\therefore\ m\sqrt{(x+a)^2+y^2}=n\sqrt{(x-a)^2+y^2}$　である．

以下，これを同値変形する．まず両辺を2乗して，

$$m^2\{(x+a)^2+y^2\}=n^2\{(x-a)^2+y^2\}$$

$$\therefore\ (m^2-n^2)(x^2+y^2)+2a(m^2+n^2)x=(n^2-m^2)a^2$$

◀ $\sqrt{A}=\sqrt{B} \iff A=B\geqq 0$

1°　$m=n$ のとき，上式は　$x=0$　となる．

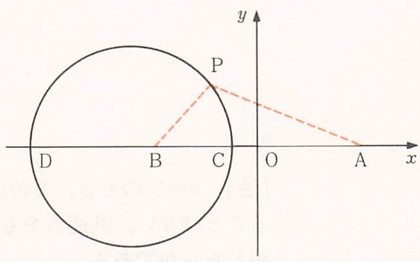
すなわち，求める軌跡は **y 軸**である．

2°　$m\neq n$ のとき，上式は

$$\left(x+\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}a\right)^2+y^2=\left(\frac{2mn}{m^2-n^2}a\right)^2$$ となる．すなわち，

求める軌跡は，**中心 $\left(-\dfrac{m^2+n^2}{m^2-n^2}a,\ 0\right)$，**

半径 $\dfrac{2mn}{|m^2-n^2|}a$ の円 である．

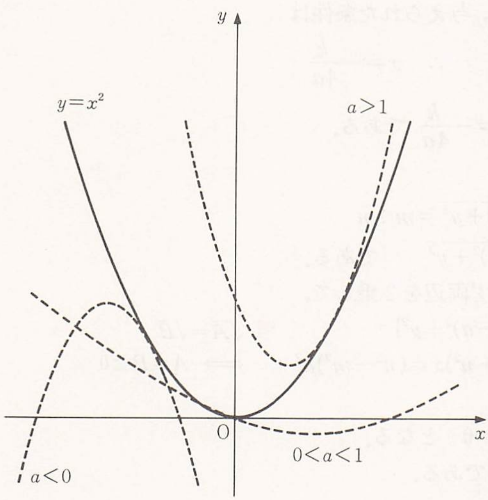


［注］　(2)において，$m\neq n$ のときは，いわゆるアポロニオスの円である．これは線分 AB を $m:n$ に内分する点Cと外分する点Dを直径の両端とする円である．

B.120

放物線 $y=x^2$ と接するように放物線 $y=ax^2$ を平行移動するとき，移動する放物線の頂点はどのような図形を描くか．ただし，a は $a\neq 0,\ 1$ なる定数とする．

アプローチ 頂点が $(X,\ Y)$ に来るように $y=ax^2$ を平行移動したとき，$y=x^2$ と接するための条件はなんでしょうか．



解答 放物線

$$y=ax^2$$

を平行移動して，頂点が $(X,\ Y)$ に来るようにすると，その方程式は，

$$y=a(x-X)^2+Y \quad \cdots ①$$

となる．この放物線が

$$y=x^2 \quad \cdots ②$$

と接するための条件は，①，②から y を消去して得られる x の2次方程式

$$a(x-X)^2+Y=x^2 \quad \cdots ③$$

が重解をもつことである．

③を整理すれば

$$(a-1)x^2-2aXx+aX^2+Y=0$$

となり，重解条件は，

$$a^2X^2-(a-1)(aX^2+Y)=0$$

$$\therefore \quad Y=\frac{a}{a-1}X^2$$

である．

よって，求める軌跡は，

放物線　$y=\dfrac{a}{a-1}x^2$

である．

[注]　$a=1$ のとき，どのように平行移動しても2つの放物線が接することはない．共通点をもつならば両者は1点で交わるか，一致するかどちらかである．

B.121

傾き m の直線が放物線 $y=x^2$ と 2 交点 P，Q をもつように動くとき，線分 PQ の中点の描く軌跡を求めよ．

アプローチ　線分 PQ の中点の座標を m で表すために，2 交点 P，Q の座標そのものは不要です．しかし，2 交点は存在しなければなりません．

解答　直線 $y=mx+k$ と放物線 $y=x^2$ の共有点の x 座標は，2 次方程式

$$x^2-mx-k=0$$

の実数解であり，2 交点が存在する条件は

$$m^2+4k>0 \quad \therefore \quad k>-\frac{m^2}{4} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

である．

この条件の下で，2 交点 P，Q の座標を α，β とすると，

$$\alpha+\beta=m$$

◀解と係数の関係

が成立するから，線分 PQ の中点の座標は

$$\begin{cases} x=\dfrac{\alpha+\beta}{2} \\ y=mx+k \end{cases}$$

◀中点は直線 $y=mx+k$ の上にある．

すなわち，

$$\begin{cases} x=\dfrac{m}{2} & \cdots\cdots\cdots ② \\ y=\dfrac{m^2}{2}+k & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

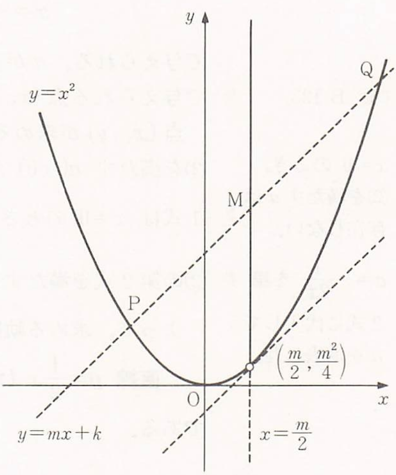
で与えられる．

そこで k が①を満たしながら動くとき，②，③で定まる点 (x, y) の軌跡を求めると，

半直線

$$\boldsymbol{x=\frac{m}{2}} \text{ かつ } \boldsymbol{y>\frac{m^2}{4}}$$

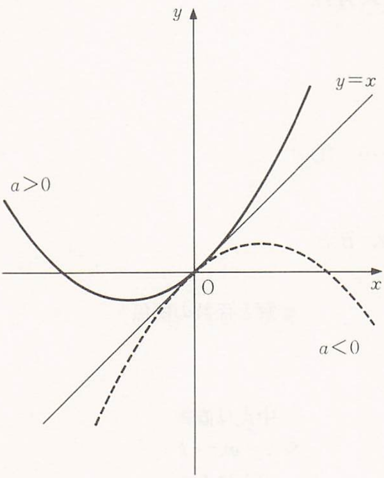
となる．



B.122

放物線Pは，y軸に平行な対称軸をもち，原点で直線 $y=x$ に接している．このような放物線Pの頂点の軌跡を求めよ．

アプローチ 原点を通る放物線の方程式は？ それが $y=x$ に接する条件は？ 方程式が書ければ頂点はすぐ分かります．



解答 原点を通りy軸に平行な対称軸をもつ放物線は，

$$y=ax^2+bx \ (a\neq 0)$$

と表せる．

これが直線 $y=x$ と接する条件は，2次方程式

$$ax^2+bx=x$$

$$\therefore \quad ax^2+(b-1)x=0$$

が重解をもつことであり，$b=1$ を得る．

よって，放物線Pは，

$$y=ax^2+x \ (a\neq 0) \quad \cdots\cdots \text{①}$$

と表せる．ここで①は

$$y=a\left(x+\frac{1}{2a}\right)^2-\frac{1}{4a}$$

と書けるから，Pの頂点の座標は

$$x=-\frac{1}{2a}, \ y=-\frac{1}{4a} \quad \cdots\cdots \text{②}$$

で与えられる．aが $a\neq 0$ を満たして動くとき，②で与えられる点(x, y)の描く軌跡を求めればよい．

☞B.123

点(x, y)が求める軌跡上にあるための条件は，②を満たす $a(\neq 0)$ が存在することである．②の第1式は $x\neq 0$ のとき解 $a=-\dfrac{1}{2x}$ をもち，これが②の第2式を満たす条件は $y=\dfrac{1}{2}x$ である．

$x=0$ のとき，②を満たすaは存在しない．

$a=-\dfrac{1}{2x}$ を第2式に代入してaを消去した．

よって，求める軌跡は

直線 $y=\dfrac{1}{2}x$（ただし，原点を除く）

である．

B.123

t がすべての実数値をとって変化するとき,

$$x=\frac{t}{1+t^2} \quad \cdots\cdots\cdots ①, \qquad y=\frac{1}{1+t^2} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

で定まる点 P$(x,\ y)$ の軌跡を求めよ.

アプローチ 点Pの軌跡 L とは, 適当な実数 t を用いて①, ②で表されるような $(x,\ y)$ の全体です.

したがって,

$$(x,\ y)\in L \iff ①, ②を満たす実数 t が存在する$$

が成り立ちます.

解答 ①, ②を満たす実数 t が存在するような x, y の条件が求める点Pの軌跡を与える.

$y\neq 0$ より, ①÷②を作ると

$$\frac{x}{y}=t \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

が得られる.

逆に, ②×③を作ると①が得られるので,

$$①かつ② \iff ②かつ③$$

である. ②と③を満たす t が存在するのは, ③を②に代入して t を消去して得られる方程式

$$y=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}$$

が成り立つときである. よって, これを整理すると,

$$\therefore\ \ y=\frac{y^2}{y^2+x^2} \quad かつ \quad y\neq 0$$

$$\therefore\ \ x^2+y^2=y \quad かつ \quad y\neq 0$$

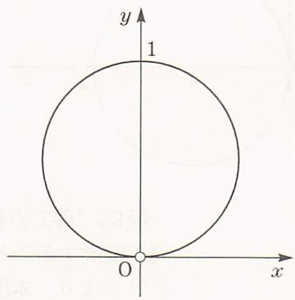
となる.

ゆえに, 求める点Pの軌跡は,

円 $x^2+y^2=y$ から1点 O(0, 0) を除いたもの

である.

◀①と③を組んでも②が得られないので,
①かつ② $\not\Leftrightarrow$ ①かつ③
である.



[注] $①^2+②^2$ を作ると直ちに $x^2+y^2=y$ ………④ が得られる. しかし, これだけで, “点Pの軌跡が円④である”とは言えない. つまり, “点Pが円④の周上にある”ことが分かっただけで, “Pが円④のどの部分を動き得るか(軌跡の限界)”は不明である.

B.124

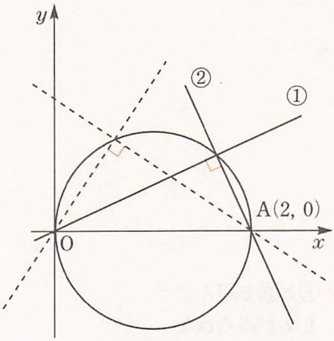
m がすべての実数値をとって変化するとき，2 直線

$y=mx$ ………①

$x+my-2=0$ ………②

の交点の軌跡を求めよ．

アプローチ “交点の軌跡”だからといってすぐに“交点の座標”を求めようとしてはいけません．ここでは，2 直線の位置関係に注目してみましょう．



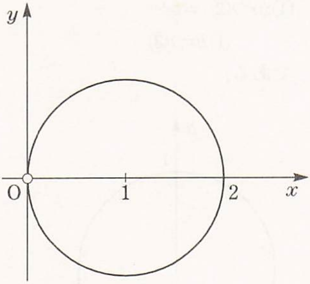
解答 2 直線①，②は，m の値に依らずそれぞれ O(0, 0)，A(2, 0) を通り，かつ直交している．

よって，それらの交点は，O，A を直径の両端とする円の周上にある．

ところで，直線①の傾きが m がすべての実数値をとって変化すると，直線①は，原点 O を中心として回転し，y 軸以外の任意の O を通る直線を表す．したがって，求める軌跡は，O，A を直径の両端とする円，すなわち，

円 $(x-1)^2+y^2=1$ から 1 点 O(0, 0) を除いたもの

である．



［注］ 実際に交点を求めると，

$$x=\frac{2}{1+m^2}\ \cdots\cdots\cdots③,\quad y=\frac{2m}{1+m^2}\ \cdots\cdots\cdots④$$

となり，前問 B.123 と同じような形になるので前問と同様な議論を展開すれば正解が得られる．しかし，一般に，“連立方程式を解く”とは，その方程式を“最も単純な方程式に同値変形すること”である．(☞「大学への数学 A ニューアプローチ」C.2) つまり，本問の場合は，

“①かつ② $\iff$ ③かつ④” である．

とは言うものの，③，④の形に変形してから，m の存在条件（m の消去）を考えるのではなく，初めから①，②を満たす m の存在条件を考えればよいのである．これに基づいた別解は読者に委ねる．次問 B.125 の解答が参考となろう．

B.125

mが $m>0$ の範囲を動くとき，2直線

$$(m-1)x-y+1=0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$
$$mx+(m-2)y+2=0 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

の交点の軌跡を求めよ．

アプローチ 前問 B.124 の[注]を読めば，もう“交点の座標を求めよう”とは考えないでしょう！

解答 点$(x,\ y)$が求める軌跡上にあるための条件は①，②を満たす $m>0$ が存在することである．そこで，①から定まるmが②および $m>0$ を満たす条件を求める．

1°　$x\neq 0$ のとき，①より $m=\dfrac{x+y-1}{x}$.

これが②および $m>0$ を満たすことから

$$\begin{cases}\dfrac{x+y-1}{x}x+\left(\dfrac{x+y-1}{x}-2\right)y+2=0 & \cdots\cdots ③\\[2mm] \dfrac{x+y-1}{x}>0 & \cdots\cdots ④\end{cases}$$

ここで③は，

$$\begin{cases}(x+y-1)x+(x+y-1-2x)y+2x=x & \cdots\cdots ⑤\\ x\neq 0 & \cdots\cdots ⑥\end{cases}$$

◀ ③の両辺にxをかけた．

と同値であり，④は

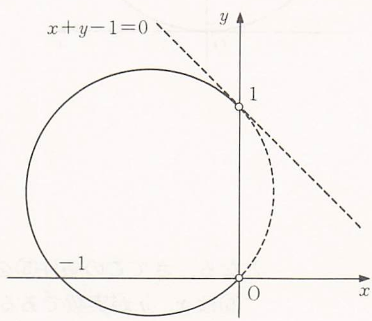
$$(x+y-1)x>0 \quad \cdots\cdots\cdots ⑦$$

◀ $\dfrac{B}{A}>0 \iff AB>0$

と同値である．⑤，⑥，⑦を整理して

$$\begin{cases}\boldsymbol{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}} & \cdots ⑧\\ \boldsymbol{(x+y-1)x>0} & \cdots ⑨\end{cases}$$

2°　$x=0$ のとき，①，つまり，$(m-1)\cdot 0-y+1=0$ を満たすmが存在する条件は $y=1$ となるが，このとき②は $m=0$ となり，$m>0$ に反する．以上により，求める軌跡は⑧，⑨で与えられる円の一部である．(右図)



[注]　図から，求める軌跡は，⑧ かつ $x<0$ としてよい事が分かる．

B.126

放物線 $y=2x^2+2ax+a^2$ と直線 $y=x+a$ が共有点をもつように実数 a が変化するとき，共有点の存在範囲を図示せよ．

アプローチ B.125 と同様に，共有点の座標を求めることは，あまり意味がありません．共有点 $(x,\ y)$ の満たすべき条件を直接考えます．

解答 点 $(x,\ y)$ が求める範囲に属するための条件は，

$$\begin{cases} y=2x^2+2ax+a^2 & \cdots\cdots\cdots ① \\ y=x+a & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

を満たす a が存在することである．

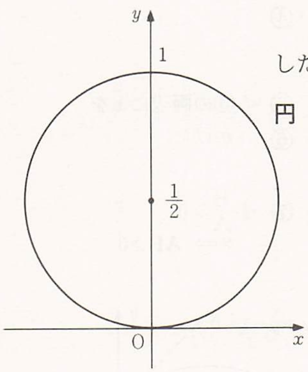
よって，②から定まる $a(=y-x)$ が①を満たす条件を求めればよい．

①，②から a を消去する．

$$y=2x^2+2(y-x)x+(y-x)^2$$

$$\therefore\quad x^2+y^2-y=0$$

$$\therefore\quad x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4} \quad \cdots\cdots\cdots ③$$



したがって，求める範囲は，**中心 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$，半径 $\frac{1}{2}$ の円** である．

［注］ ①，②の共有点の x 座標は2次方程式

$$2x^2+2ax+a^2=x+a$$

$$\therefore\quad 2x^2+(2a-1)x+a^2-a=0 \cdots\cdots ④$$

の実数解である．したがって，a の動きうる範囲は，④の判別式≧0 より，

$$\frac{1-\sqrt{2}}{2}\leqq a\leqq\frac{1+\sqrt{2}}{2} \quad \cdots\cdots ⑤$$

となる．さてこの条件⑤を考慮する必要はなかったのだろうか．

⑤は x，y が実数であることを保証するものである．

しかし③を xy 平面に図示するとき，x，y の実数条件を考慮したことになるので⑤は必要ないのである．

B. 127

直線 $y=mx$ と円 $(x-2)^2+y^2=1$ が 2 交点P，Qをもつように m が動くとき，線分PQ上にあって
$\overline{OP}\cdot\overline{OQ}=\overline{OR}^2$ を満たす点Rの軌跡を求め図示せよ．

アプローチ Rの座標を決めるための方程式を見つければ，あとはB.125，B.126と同じ原理で解けるでしょう．

解答　2点P，Qの x 座標は

$$(x-2)^2+(mx)^2=1$$

$$\therefore\quad (m^2+1)x^2-4x+3=0 \quad \cdots\cdots ①$$

の2実数解である．

①が異なる2実数解をもつ条件は

$$4-3(m^2+1)>0 \quad \therefore\quad |m|<\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \cdots\cdots ②$$

であり，このとき2解を α，β とすると，点Rの x 座標は

$$x=\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{\frac{3}{m^2+1}} \quad \cdots\cdots ③$$

で与えられ，y 座標は

$$y=mx \quad \cdots\cdots ④$$

から定まる．したがって，点(x, y)が求める軌跡上にあるための条件は，②，③，④を満たす m が存在することである．

$x=0$ とすると③と矛盾するので，$x\neq 0$ である．このとき④から $m=\dfrac{y}{x}$ となり，これが②，③を満たすことから，

$$\left|\frac{y}{x}\right|<\frac{1}{\sqrt{3}},\quad x=\sqrt{\frac{3x^2}{x^2+y^2}}$$

すなわち

$$|\boldsymbol{y}|<\frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{3}}}\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{x^2+y^2=3}$$

を得る(図2)．

図1

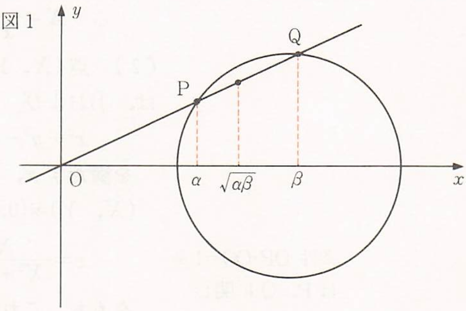
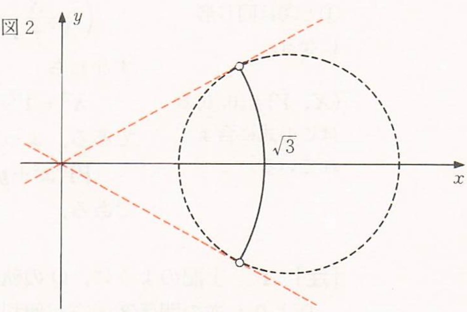


図2



[注]　これはA1.13のIIで幾何的に考察した問題に対する解析的な解答である．軌跡の限界は実数解条件②として現れた．

B.128

原点Oを以外の点Pに対し，半直線OP上に OP·OQ=1 を満たす点Qをとる．

(1) Pの座標$(x,\ y)$を用いて，Qの座標$(X,\ Y)$を表せ．

(2) Pが円 $x^2+y^2-4x+1=0$ 上を動くとき，点Qの描く軌跡を求めよ．

アプローチ (1) Qの座標は$(kx,\ ky)$と表せます．(2)「x, yを消去すれば軌跡の方程式が得られる」のですが，その意味が大切です．

解答 (1) Qは半直線OP上にあるから，

$$X=kx,\quad Y=ky$$

と表せる（ただし $k>0$）．OP·OQ=1 より

$$k^2(x^2+y^2)^2=1 \quad \therefore\quad k=\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{X=\frac{x}{x^2+y^2},\quad Y=\frac{y}{x^2+y^2}} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

(2) 点$(X,\ Y)$が求める軌跡上にあるための条件は，①および

$$x^2+y^2-4x+1=0 \quad \cdots\cdots \text{②}$$

を満たすx, yが存在することである．①は，$(X,\ Y)\neq(0,\ 0)$ のときに解

条件 OP·OQ=1 はP，Qに関して対称的だから，①と③は同じ形になる．

$$x=\frac{X}{X^2+Y^2},\quad y=\frac{Y}{X^2+Y^2} \quad \cdots\cdots \text{③}$$

をもち，これが②を満たす条件は

$$\left(\frac{X}{X^2+Y^2}\right)^2+\left(\frac{Y}{X^2+Y^2}\right)^2-4\frac{X}{X^2+Y^2}+1=0$$

すなわち

$(X,\ Y)\neq(0,\ 0)$ はこの式に含まれている．

$$X^2+Y^2-4X+1=0$$

である．よって点Qの描く軌跡は，

円 $\boldsymbol{x^2+y^2-4x+1=0}$

である．

［注］1° 上記のように，Qの軌跡を求めるためには，対応関係①自身よりも逆の関係③の方が便利である．

2° 対応P→Qによって，原点を通らない円はどれも原点を通らない円に移る．原点を通る円はどうなるだろう．

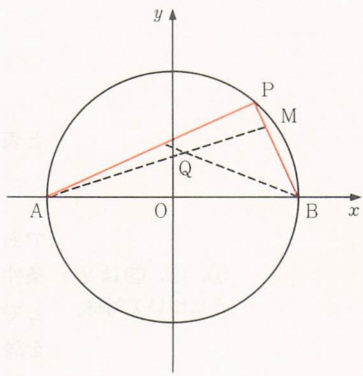
B.129

2点A$(-1,\ 0)$, B$(1,\ 0)$を直径の両端とする円周上(A, Bを除く)の動点Pに対し, 線分PAを3:4に内分する点をN, 線分PBを1:4に内分する点をMとする. AMとBNの交点Qの描く軌跡の方程式を求めよ.

アプローチ Pに対してQを定める規則を方程式で表現すれば, その後の解法の原理は, B.128(2)と同じです.

解答 Pの座標を$(u,\ v)$とすると, Nの座標は

$\left(\dfrac{4u-3}{7},\ \dfrac{4v}{7}\right)$, Mの座標は$\left(\dfrac{4u+1}{5},\ \dfrac{4v}{5}\right)$



P≠A, Bのとき, 直線AM, BNはそれぞれ

$$2v(x+1)-(2u+3)y=0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

$$2v(x-1)-(2u-5)y=0 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

と表され, Qの座標は①, ②の解となる.

さて点P$(u,\ v)$は

$$u^2+v^2=1 \text{ かつ } v\neq 0 \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

を満たして動く. したがって, 点$(x,\ y)$が求める軌跡上にあるための条件は, ①, ②, ③を満たすu, vが存在することである.

そこで①, ②から定まるu, v

すなわち,

$$u=2x+\frac{1}{2},\quad v=2y \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

が③を満たす条件を求めると,

$$\left(2x+\frac{1}{2}\right)^2+(2y)^2=1 \text{ かつ } 2y\neq 0$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}} \text{ かつ } \boldsymbol{y\neq 0}$$

となる.

[注] ①, ②をx, yについて解くと

$$x=\frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{2}\right),\quad y=\frac{1}{2}v$$

となり, これが対応P⟶Qを与える. これは点$\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$を中心にして$\dfrac{1}{2}$倍に拡大(つまり半分に縮小)する写像である.

B.130

Oを原点とし，放物線 $y=\sqrt{3}x^2$ 上に 2 点P，Qを $\angle POQ=90°$ となるようにとるとき，線分PQの中点Rの描く軌跡の方程式を求めよ．

アプローチ P，Qの x 座標を変数にとると，$\angle POQ=90°$ という制約から，それらの間に関係が生じます．

解答 $P(\alpha,\ \sqrt{3}\alpha^2)$，$Q(\beta,\ \sqrt{3}\beta^2)$ とおくと，Rの座標 $(x,\ y)$ は

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta) & \cdots\cdots\ ① \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\alpha^2+\beta^2) & \cdots\cdots\ ② \end{cases}$$

と表せる．一方 $\angle POQ=90°$ となるための条件は，

$$\sqrt{3}\alpha\cdot\sqrt{3}\beta=-1 \quad \therefore \quad \alpha\beta=-\frac{1}{3} \cdots\cdots\ ③$$

であるから，点 $(x,\ y)$ が求める軌跡上にあるための条件は，①，②，③を満たす実数 α，β が存在することである．そこで①，③から定まる実数 α，β が②を満たす条件を求める．

①，②，③は α，β について対称．

①，③を満たす α，β は，2 次方程式

$$t^2-2xt-\frac{1}{3}=0$$

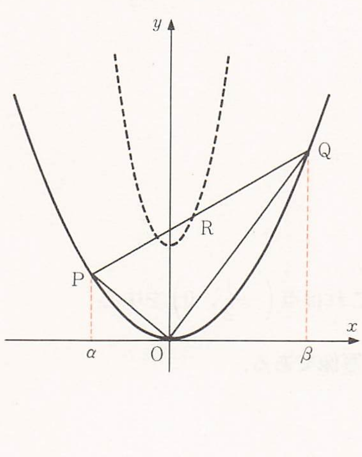
の 2 解だから，任意の x に対して実数となり，さらにこの α，β が②を満たす条件は

判別式 >0 より，x の変域に制限がつかない．

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2}\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{y=2\sqrt{3}x^2+\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

である．



［注］　この問題は，$\alpha\beta$ 平面上の図形③を写像①，②で xy 平面に移す問題であるとも考えられる．この意味で，B.128～B.130は同じ種類の問題と言える．

B.131

次の各不等式を満たす点$(x,\ y)$の集合を図示せよ．

(1)　$y>\dfrac{1}{x}$ … ①　(2)　$xy>1$ … ②　(3)　$\dfrac{1}{xy}<1$ … ③

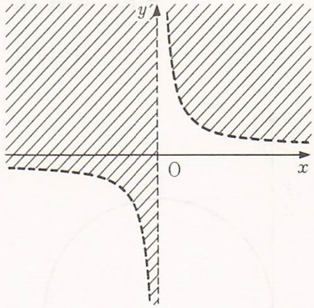
アプローチ　不等式 $y>f(x)$ は，xy 平面上で曲線 $y=f(x)$ の上側の部分を表すという基本事項だけで解決します．

解答　**(1)**　①を満たす点$(x,\ y)$の集合は，

直角双曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ ……… ④

の上側にある部分である．よって，図1の斜線部分が求めるものである．

図1



(2)　②は，

$x>0$ のとき，$y>\dfrac{1}{x}$

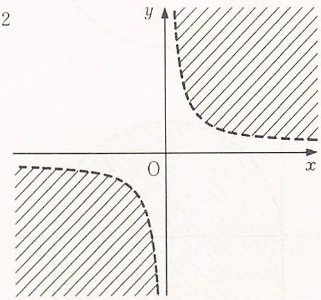
$x<0$ のとき，$y<\dfrac{1}{x}$

となるので，②を満たす点$(x,\ y)$の集合は，

$$\begin{cases} x>0 \text{ では曲線④の上方} \\ x<0 \text{ では曲線④の下方} \end{cases}$$

の部分である．よって，求める領域は，図2斜線部のようになる．

図2



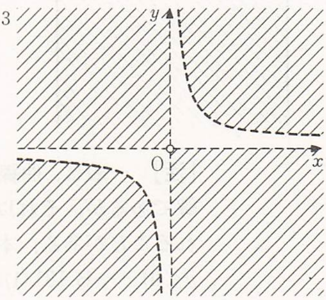
(3)　③は，

$y>0$ のとき，$y>\dfrac{1}{x}$

$y<0$ のとき，$y<\dfrac{1}{x}$

となるので，これを図示して図3斜線部を得る．

図3



[注]　1°　以上(1)，(2)，(3)のいずれの場合も，境界上の点を含まないことは自明である．

2°　③は　$\dfrac{xy-1}{xy}>0$　すなわち，

$$xy(xy-1)>0$$

と同値変形してもよい．

B.132

(1)　$y=\sqrt{x(1-x)}$ のグラフを描け．

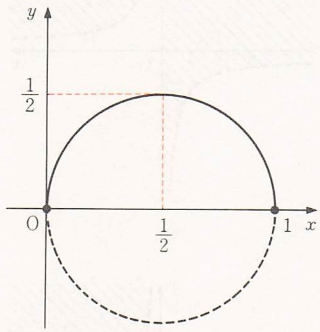
(2)　不等式 $y<\sqrt{x(1-x)}$ で表される領域を図示せよ．

アプローチ $\sqrt{\ }$ (根号) がついているので，まず両辺を平方したくなりますが，単に平方するだけでは同値性がくずれます．つまり，

$a=b \implies a^2=b^2$ は言えますが，この逆は言えないからです．

一般に，実数 A，B について，次の関係が成り立ちます．

$$A=\sqrt{B} \iff \begin{cases} A^2=B \\ A\geqq 0 \end{cases}$$

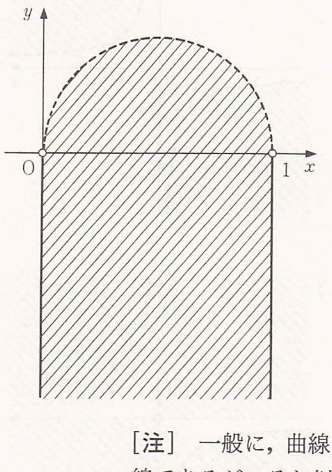


解答

(1)　$y=\sqrt{x(1-x)} \iff \begin{cases} y^2=x(1-x) & \cdots① \\ y\geqq 0 & \cdots② \end{cases}$

①は，$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$　………　①′

と変形できるので，点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円を表す．したがって，①かつ②は，円①′の上半分 (左図実線部) を表す．



(2)　$y<\sqrt{x(1-x)}$ は，(1)の曲線

$y=\sqrt{x(1-x)}$ の下側の領域を表す．

よって，(1)の結果をもとに，求める領域を図示すると，左図斜線部のようになる．ただし，境界線は，半円 $y=\sqrt{x(1-x)}$ は含まないが，2本の半直線 $x=0$，$x=1$ の $y<0$ の部分は含む．

[注]　一般に，曲線 $y=f(x)$ は，不等式 $y<f(x)$ の表す領域の境界線であるが，それ以外の境界線が，領域 $y<f(x)$ の境界線として現れることがある．本問(2)の2本の半直線 (($x=0$ または $x=1$) かつ $y<0$) や，B.131(1)における y 軸 ($x=0$) などがそれに当る．☞ C.5

B.133

次の各不等式を満たす点$(x,\ y)$の集合を図示せよ．

(1)　$y \leqq x^2$ かつ $x^2+y^2<2x$

(2)　$y>x^2$ または $x^2+y^2 \geqq 2x$

(3)　$(x^2+y^2-4)(x-y)<0$

アプローチ　(3)　実数A, Bについて，"$AB<0 \iff A,\ B$ は異符号"

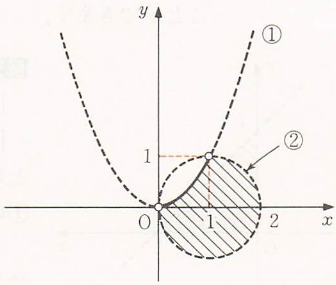
解答　**(1)**　$y \leqq x^2$ は，

放物線 $y=x^2$　………　①

とその下側を表し，$x^2+y^2<2x$ は，

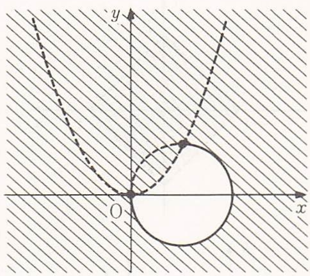
$(x-1)^2+y^2<1$ と変形できるので，

円 $(x-1)^2+y^2=1$　………　②



の内部を表す．よって，これらの共通部分が求める領域で，右図斜線部を得る．境界は，放物線①上の点は含み，円②上の点は含まない．交点(0, 0), (1, 1)も除く．

(2)　放物線①の上側と円②およびその外部を合わせたものが求める領域である．境界は，円②上の点は含み，放物線①上の点は含まない．ただし，それらの交点(0, 0), (1, 1)は含む．



(3)　$(x^2+y^2-4)(x-y)<0$ は，

$$\begin{cases} x^2+y^2-4>0 & \cdots\cdots\cdots ③ \\ x-y<0 & \cdots\cdots\cdots ④ \end{cases}$$

または

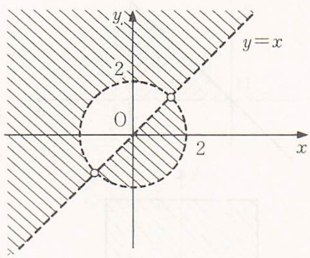
$$\begin{cases} x^2+y^2-4<0 & \cdots\cdots\cdots ⑤ \\ x-y>0 & \cdots\cdots\cdots ⑥ \end{cases}$$

と同値である．

③は，円 $x^2+y^2=4$ の外部，⑤はその内部

④は，直線 $y=x$ の上側，⑥はその下側

を表すので，求める領域は右図斜線部のようになる．境界は，すべて含まない．



[注]　**ド・モルガンの法則**(☞数学A)を利用して，(1)を否定すると，(2)が得られる．すなわち，

$$\overline{y \leqq x^2 \text{ かつ } x^2+y^2<2x} \iff \overline{y \leqq x^2} \text{ または } \overline{x^2+y^2<2x}$$

$$\iff y>x^2 \text{ または } x^2+y^2 \geqq 2x$$

したがって，(1), (2)の答は，互いに他方の補集合になっている．

B.134

次の各不等式で表される領域を図示せよ．

(1) $|x|+|y|<1$ ……… ①

(2) $|x+y|+|x-y|\leqq 1$ ……… ②

アプローチ 絶対値記号のはずし方の原則は，その中身の正負で分類することです．たとえば(1)では，x，y の正負で4通りの分類をすればよいのです．しかし，ちょっとしたアイディアで分類の手間を減らすことができます．

解答 **(1)** ①において，

［I］ x の代りに $-x$ を代入する

［II］ y の代りに $-y$ を代入する

という変形を行っても①と同値な式が得られるので①の表す図形は，

y 軸および x 軸に関して対称

である．

ところで，$x\geqq 0$ かつ $y\geqq 0$ の範囲では①は，

$$x+y<1 \quad \therefore \quad y<-x+1$$

となる（図1）ので，求める領域は，それを両座標軸に関して折り返して，得られる図2のような正方形の内部である．

図1

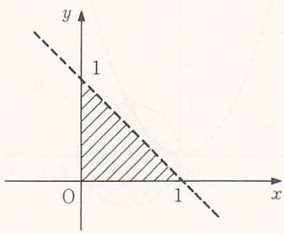
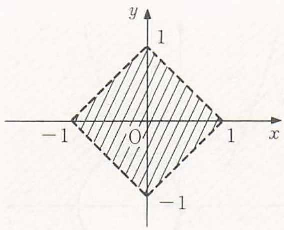


図2



(2) ②において，上記の変形［I］，［II］を行なっても②式は不変であり，さらに

［III］ x，y の代りに，それぞれ y，x を代入する

という変形によっても式が不変なので，②が表す図形は，両座標軸および直線 $y=x$ に関して対称である．

よって，いま，

$$x\geqq 0 \text{ かつ } y\geqq 0 \text{ かつ } y\leqq x$$

の範囲で考えると，②は

$$x+y+(x-y)\leqq 1 \quad \therefore \quad x\leqq \frac{1}{2}$$

となり，図3の三角領域を表すので，求める領域は，図4のような正方形の周および内部となる．

図3

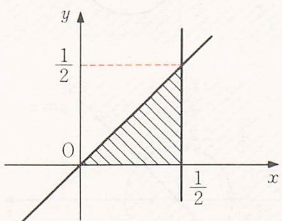
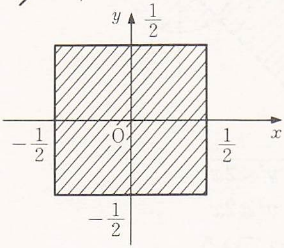


図4



B.135

直線　$mx+y-m^2+2=0$　………①

が2点 A$(-1,\ 0)$, B$(0,\ 2)$ を結ぶ線分(両端も含む)と共有点をもつような実数 m の値の範囲を求めよ.

アプローチ 直線①と線分 AB の方程式を連立する(☞[注]2°)という方法も考えられますが, ここでは, 正領域, 負領域の考え方を用いてみましょう.

解答 $f(x,\ y)=mx+y-m^2+2$ とおくと,

直線 $f(x,\ y)=0$ と線分 AB とが共有点をもつのは,

(i) A, B が $f(x,\ y)$ の異符号の領域にある(図1)

または

(ii) A, B の少なくとも一方が直線 $f(x,\ y)=0$ 上にある(図2)

ときである.

(i) の条件は, $f(-1,\ 0)\cdot f(0,\ 2)<0$　………②

(ii) の条件は, $f(-1,\ 0)\cdot f(0,\ 2)=0$　………③

であり, これらは

$f(-1,\ 0)\cdot f(0,\ 2)\leqq 0$　………④

とまとめられる. よって,

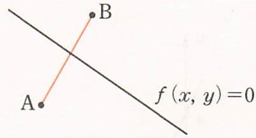
$(-m-m^2+2)(4-m^2)\leqq 0$

$(m+2)^2(m-1)(m-2)\leqq 0$

∴　$\boldsymbol{m=-2}$ または $\boldsymbol{1\leqq m\leqq 2}$

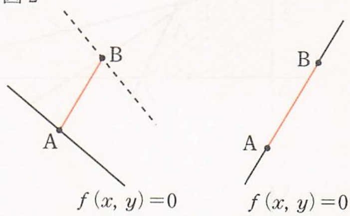
を得る.

図1



(A, B が直線の両側)

図2



(A, B の一方が直線上)　(A, B ともに直線上)

[注] 1°　線分の"両端が含まれない"とすると, 共有点の条件は,

② または　$f(-1,\ 0)=f(0,\ 2)=0$ (図2の右の場合)

となり, "両端が含まれる"ときの単純な条件④より注意を要する.

2°　直線①と線分 AB : $\begin{cases} y=2x+2 & \cdots\cdots\cdots ② \\ -1\leqq x\leqq 0 & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$ が共有点をもつのは,

①, ②から y を消去して得られる x の方程式

$(m+2)x=(m+2)(m-2)$　………④

が③の範囲に解をもつときである.

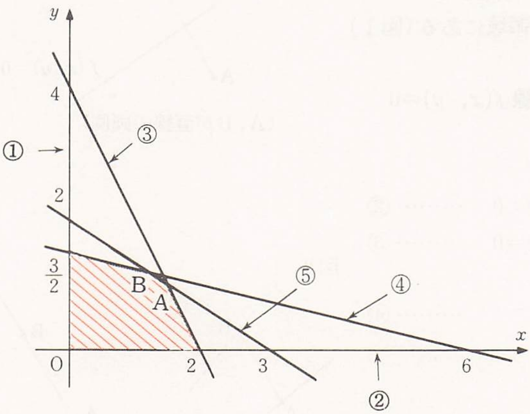
このように考えて本問を解くこともできるが, 上と比べてやや面倒である. (そもそも, $m\neq -2$; $m=-2$ の場合分けが必要である.)

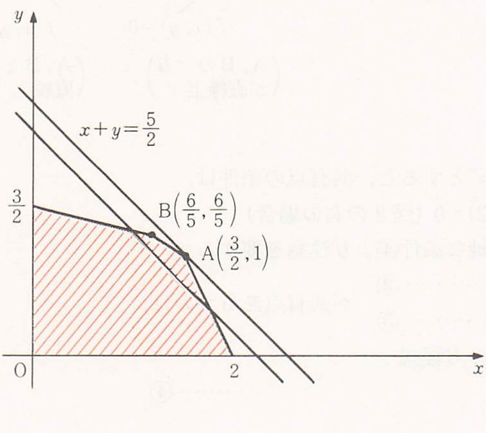
B.136

実数 x, y が条件 $\begin{cases} x,\ y \geqq 0 \\ 2x+y \leqq 4 \\ x+4y \leqq 6 \\ 2x+3y \leqq 6 \end{cases}$

を満たして動くとき，$z=x+y$ の最大値を求めよ．

アプローチ　まず，x, y に課された条件を，xy 平面上に図示しましょう．k を定数とすると，$x+y=k$ は xy 平面上の直線です．





解答　x, y の満たすべき条件を xy 平面上に図示すると，直線

$$\begin{cases} x=0 & \cdots\cdots\cdots ① \\ y=0 & \cdots\cdots\cdots ② \\ 2x+y=4 & \cdots\cdots\cdots ③ \\ x+4y=6 & \cdots\cdots\cdots ④ \\ 2x+3y=6 & \cdots\cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

で囲まれた多角形となる．

そこで，この領域と直線

$$x+y=k \quad \cdots\cdots\cdots ⑥$$

が共有点をもつような定数 k のうち最大のものを求める．直線の傾きの比較から，k が最大になるのは，直線⑥が 2 直線③，⑤の交点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{3}{2},\ 1\right)$ を通るとき，すなわち，

$$k=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$$

のときである．よって，z は

$$(x,\ y)=\left(\frac{3}{2},\ 1\right) \text{ のとき}$$

最大値 $\dfrac{5}{2}$ をとる．

［注］　$z=x+y$ の値域（とり得る値の範囲）は，直線⑥と図の領域が共有点をもつ条件として求められる．

B.137

実数 x, y が条件

$$x^2 \leqq y \leqq x+1 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

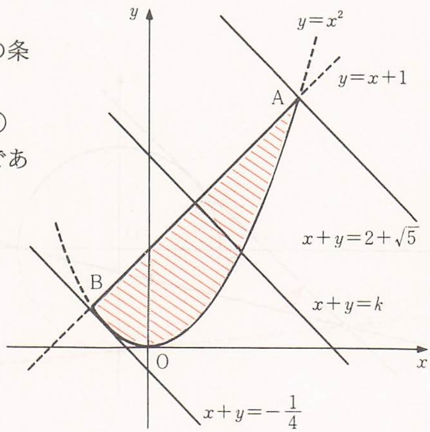
を満たして動くとき,

$$z = x + y \quad \cdots\cdots \text{②}$$

の値域を求めよ.

アプローチ 前問と同様の方法を用いることができますが, 直線 $x+y=k$ と放物線の接点がどこにあるか注意が必要です.

解答 不等式①を xy 平面に図示すると, 右図の斜線部分となる.



実数 k が求める値域に属するための条件は, 直線

$$x+y=k \quad \cdots\cdots \text{③}$$

と右の斜線部分が共有点をもつことである. とくに, 直線③が①と②の交点 $A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ を通るのは

$$k=\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{3+\sqrt{5}}{2}=2+\sqrt{5}$$

のときであり, また直線③が放物線 $y=x^2$ に接するのは, 2次方程式

$$x^2+x-k=0$$

が重解をもつとき, すなわち

$$k=-\frac{1}{4}$$

のときである. ここで, 接点 $C\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ は2点 $A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$, $B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ の間にあるから, 直線③と図の斜線部分が共有点をもつ条件は,

◀もし接点CがBの左側に出ていたら, 直線③が点Bを通るときに k は最小となる.

$$-\frac{1}{4} \leqq k \leqq 2+\sqrt{5}$$

となる. よって, z の値域は

$$\boldsymbol{-\frac{1}{4} \leqq z \leqq 2+\sqrt{5}}$$

である.

B.138

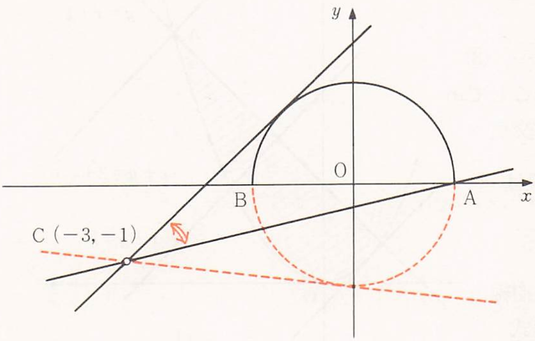
実数 x, y が $\begin{cases} x^2+y^2=2 & \cdots\cdots\cdots ① \\ y \geqq 0 & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$

を満たして動くとき，

$$z=\frac{y+1}{x+3} \qquad \cdots\cdots\cdots ③$$

の値域を求めよ．

アプローチ　z を固定すると，$\dfrac{y+1}{x+3}=z$ は，xy 平面上で直線［から1点 $(-3,\ -1)$ を除いたもの］を表します．



解答　①,②を xy 平面に図示すると，左図のような半径 $\sqrt{2}$ の半円 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ となる．一方③は $\begin{cases} y+1=z(x+3) \\ x \neq -3 \end{cases}$ と同値だから，xy 平面上では，点C $(-3,\ -1)$ を通る直線から1点Cを除いたものを表す．これらが共有点をもつような z の値の範囲が求める値域である．ここで直線の傾きは z だから，

z が最大 $\iff$ 直線が半円に接する．

ところが，直線が円 $x^2+y^2=2$ に接するのは，原点から直線に至る距離が $\sqrt{2}$ に等しいときだから

> 直線と円が接する
> $\iff$
> 円の中心から直線に至る距離
> ＝円の半径

$$\frac{|3z-1|}{\sqrt{1+z^2}}=\sqrt{2} \qquad \therefore \quad z=-\frac{1}{7},\ 1$$

このうち図の半円に接するのは $z=1$ の方である．よって，z の最大値は1である．また，

z が最小 $\iff$ 直線が点 $\mathrm{A}(\sqrt{2},\ 0)$ を通る

$$\iff z=\frac{1}{\sqrt{2}+3}=\frac{3-\sqrt{2}}{7}$$

よって，z の最小値は $\dfrac{3-\sqrt{2}}{7}$ である．

以上により，z の値域は $\boldsymbol{\dfrac{3-\sqrt{2}}{7} \leqq z \leqq 1}$ である．

B.139

A(−1, 0) と B(−1, 1), C(1, 0) と D(1, 2) を端点とする線分 AB, CD と共有点をもつように，放物線 $y=x^2$ を平行移動するとき，

(1)　放物線と y 軸との交点の存在範囲を求めよ．

(2)　放物線と直線 $x=2$ との交点の存在範囲を求めよ．

アプローチ　平行移動した後の放物線は $y=x^2+ax+b$ と表せます．そこで，これと y 軸に平行な線分 AB, CD とが共有点をもつような a, b の条件を求めます．

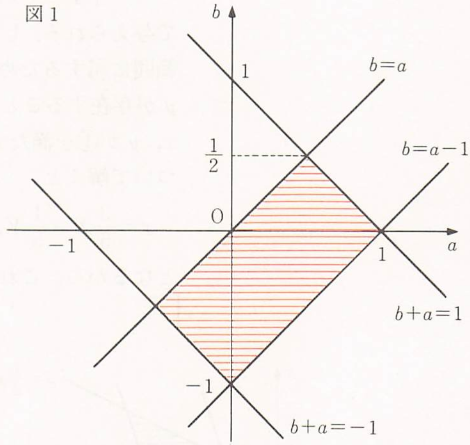
解答　放物線 $y=x^2+ax+b$ が線分 AB, BC と共有点をもつ条件は，

$$\begin{cases} 0\leqq 1-a+b\leqq 1 \\ 0\leqq 1+a+b\leqq 2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} -1\leqq b-a\leqq 0 \\ -1\leqq b+a\leqq 1 \end{cases}$$

であり，これを ab 平面に図示すると，図1のようになる．

図1



(1)　図1の斜線部を点 (a, b) が動いたとき，b の値域は $-1\leqq b\leqq \frac{1}{2}$ であるから，放物線と y 軸との交点の存在範囲は，y 軸の $\boldsymbol{-1\leqq y\leqq \frac{1}{2}}$ の部分である．

(2)　放物線 $y=x^2+ax+b$ と直線 $x=2$ との交点の y 座標は，$4+2a+b$ である．図1の斜線部分と直線

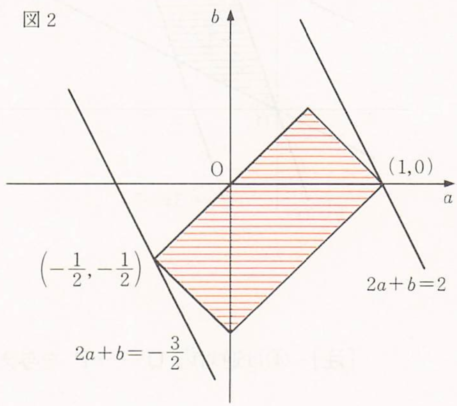
$$t=2a+b$$

が共有点をもつ条件は，図2により

$$-\frac{3}{2}\leqq t\leqq 2$$

である．よって，求める交点の存在範囲は直線 $x=2$ の $\boldsymbol{\frac{5}{2}\leqq y\leqq 6}$ の部分である．

図2



B.140

4 点 $(0,\ 0)$, $(1,\ 0)$, $(1,\ 1)$, $(0,\ 1)$ を頂点とする正方形の内部および周上を動く点 $P(x,\ y)$ に点 $Q(2x+y,\ x+3y)$ を対応させるとき，点Qの動く範囲を図示せよ．

アプローチ B.128〜B.130と比べて，原理的な違いはありません．点Qが求める範囲に属するための条件は何かを考えればよいのです．

解答 点 $P(x,\ y)$ の動く範囲は

$$0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1 \quad \cdots\cdots ①$$

と表せる．また $Q(X,\ Y)$ は

$$\begin{cases} X=2x+y & \cdots\cdots ② \\ Y=x+3y & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

で与えられる．したがって，点 $Q(X,\ Y)$ が求める範囲に属するための条件は，①，②，③を満たす x，y が存在することである．そこで②，③から定まる x，y が①を満たす条件を求める．②，③を x，y について解くと

$$x=\frac{3}{5}X-\frac{1}{5}Y,\ y=-\frac{1}{5}X+\frac{2}{5}Y \quad \cdots\cdots ④$$

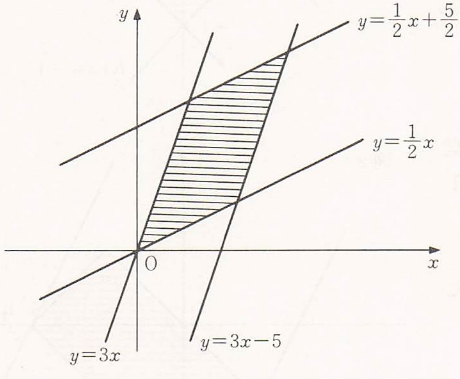
となるから，これが①を満たす条件は

$$\begin{cases} 0 \leqq \dfrac{3}{5}X-\dfrac{1}{5}Y \leqq 1 \\ 0 \leqq -\dfrac{1}{5}X+\dfrac{2}{5}Y \leqq 1 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} 3X-5 \leqq Y \leqq 3X \\ \dfrac{1}{2}X \leqq Y \leqq \dfrac{1}{2}X+\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

であり，これを xy 平面に図示して左図を得る．



[注]　④は逆対応 Q ⟶ P を与える式である．☞ B.128 [注]1°

B.141

点 P$(\alpha,\ \beta)$ が $\alpha^2+\beta^2<1$ を満たして動くとき，
点 Q$(\alpha+\beta,\ \alpha\beta)$ の動く範囲を図示せよ．

アプローチ　2次方程式の解の公式を使えば，逆対応 Q⟶P を表す式も作れますが，そうしないでもよさそうです．

解答　実数 α，β が

$$\alpha^2+\beta^2<1 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

を満たして動くとき，

$$\begin{cases} x=\alpha+\beta & \cdots\cdots \text{②} \\ y=\alpha\beta & \cdots\cdots \text{③} \end{cases}$$

で定まる点$(x,\ y)$の存在範囲を求める．

点$(x,\ y)$が求める範囲に属するための条件は，①，②，③を満たす実数 α，β が存在することである．

ここで②，③を満たす α，β は，2次方程式

$$t^2-xt+y=0$$

の2解だから，条件

$$x^2-4y\geqq 0 \quad \cdots\cdots \text{④}$$

◀実数条件が必要

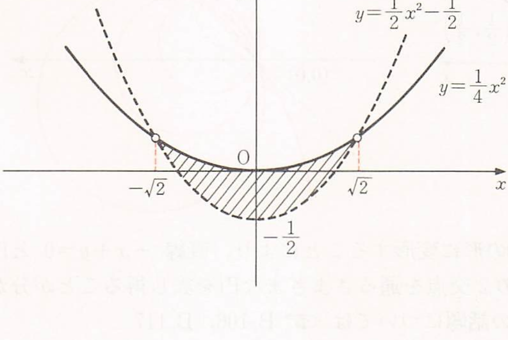
の下で α，β は実数となり，このとき α，β が①を満たすための条件は

$$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta<1$$

$$\therefore\quad x^2-2y<1 \quad \cdots\cdots \text{⑤}$$

である．

以上により Q$(x,\ y)$ の存在範囲は④かつ⑤となり，xy 平面に図示して下図を得る．



B.142

t が実数全体を動くとき，円

$$x^2+y^2-tx+(t-1)y=0 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

の通り得ない点全体の集合を求めよ．

アプローチ 点(1, 2)を通るような t の値を求めることは簡単です．それでは，点(1, 1)を通るような t の値は？　一般に，点(x, y)を通り得るかどうかは，何によって決まるのでしょうか．

解答 円①が点(x, y)を通ることがあるための条件は，①を満たす実数 t が存在することである．
そこで，①が解をもたない条件を求める．

①を t についての方程式と見なす．

①を t について整理すると，

$$(-x+y)t+x^2+y^2-y=0 \quad \cdots\cdots \text{②}$$

となる．

i） $x \neq y$ のとき，②は解をもつ

ii） $x=y$ のとき，②は　$2x^2-x=0$

となり，$x=0,\ \frac{1}{2}$ ならばすべての t に対し成立し，$x \neq 0,\ \frac{1}{2}$ ならばどのような t に対しても成立しない．

存在しない条件

以上より，②を満たす t が存在しない条件は，

$$\boldsymbol{x=y} \text{ かつ } \boldsymbol{x \neq 0,\ \frac{1}{2}} \qquad \text{である(図1)．}$$

図1

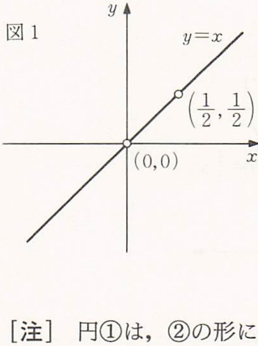
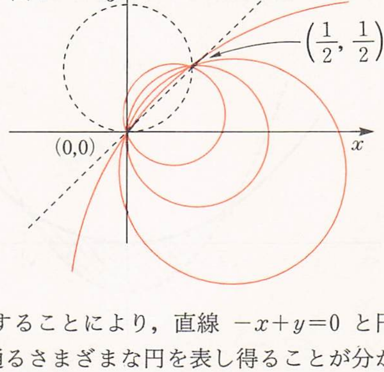


図2



［注］ 円①は，②の形に変形することにより，直線 $-x+y=0$ と円 $x^2+y^2-y=0$ の2交点を通るさまざまな円を表し得ることが分かる(図2)．類似の話題については ☞ B.106，B.117

B.143

t が $t>0$ の範囲を動くとき，直線

$$y=tx-t^2 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

の通りうる領域を求めよ．

アプローチ 点$(1,\ 0)$を通るようなtの値を求めることは簡単です．それでは，点$(1,\ 1)$を通るtの値や，点$(-1,\ 0)$を通るtの値は？一般に点$(x,\ y)$を通り得るかどうかは，何によって決まるでしょうか．

解答 直線①が点$(x,\ y)$を通ることがあるための条件は，①を満たす $t>0$ が存在することである．

①をtについて整理すると，

$$t^2-xt+y=0 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

となる．②が少なくとも1つの正の解をもつ条件を求める．②の左辺を$f(t)$とおく．

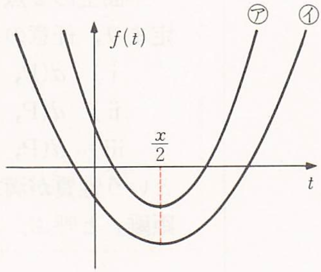
◀ ①をtについての方程式と見なす．

i）$x>0$ のとき，$f(t)$のグラフが図1の㋐または㋑のように，x軸と共有点をもてばよい．よって，②が少なくとも1つの正の解をもつ条件は，②が実数解をもつことから，

$$x^2-4y \geqq 0$$

である．

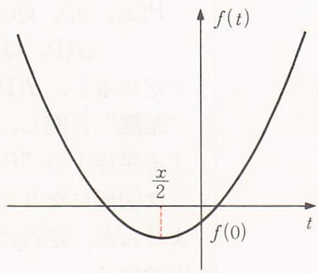
図1



ii）$x \leqq 0$ のとき，$f(t)$のグラフが図2のようになればよい．よって，②が少なくとも1つの正の解をもつ条件は $f(0)<0$

$\therefore$　$y<0$ である．

図2



以上により，求める領域は，

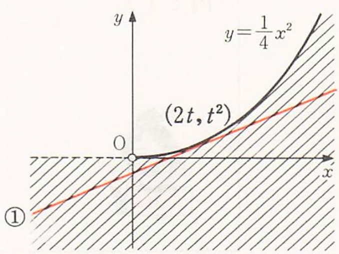
$$\boldsymbol{x>0} \text{ かつ } \boldsymbol{y \leqq \frac{1}{4}x^2}$$

または

$$\boldsymbol{x \leqq 0} \text{ かつ } \boldsymbol{y<0}$$

となる(図3)．

図3



[注]　直線①は放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ に接しながら動いている．また，その接点$(2t,\ t^2)$は放物線の右半分を動く．

Repos

円とは何か

高校数学では，円を“平面上にあって定点からの距離が一定である点の軌跡(集合)”と定義します(☞ 本書，p.14)が，距離とは，一体何でしょう？

わかったつもりでいることも，「……とは一体なにか」と正面切って聞かれると答えられないことは多いものです．しかし，数学は論理を標榜しますから，照れ笑いで済ますわけには，いきません．

現代数学で一般的なのは，次のような抽象的な定義です．

平面上の2点P，Qに対し，負でない実数 $d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$ が定まり，任意の点P，Q，Rについて

i) $d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})=0 \iff \mathrm{P}=\mathrm{Q}$

ii) $d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})=d(\mathrm{Q},\ \mathrm{P})$

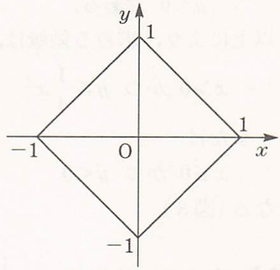
iii) $d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})+d(\mathrm{Q},\ \mathrm{R})\geqq d(\mathrm{P},\ \mathrm{R})$

という性質が満たされるとき，$d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$ を「P，Q間の距離」と呼ぶ．

$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ に対し

$$d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$$

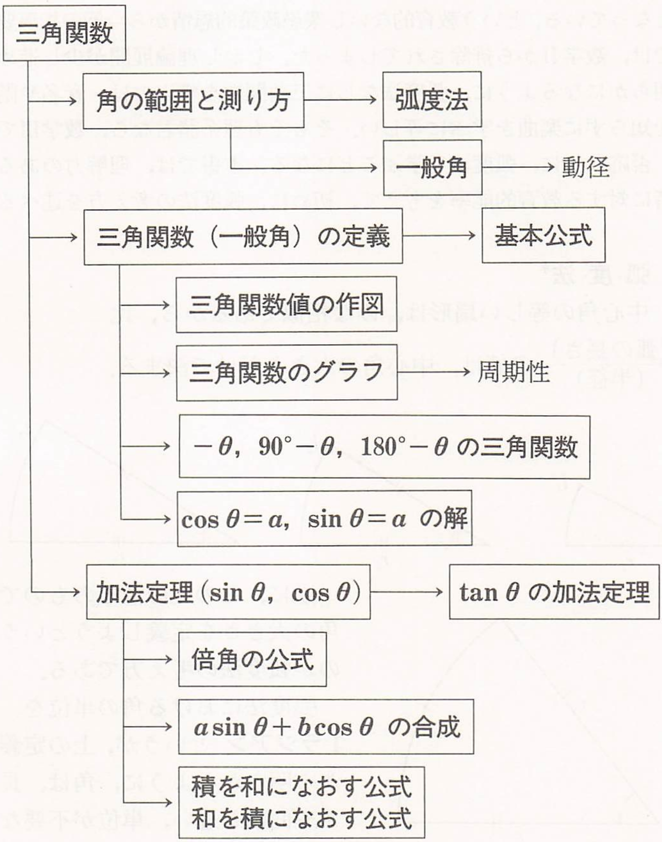
と定めると，$d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$ は，この意味で“距離”になり，この“距離”に関し，原点を中心とする半径1の“円”は右図のような図形になります．丸くありませんが，定義によればこれも円です！





§2 三角関数

□ キー・ワード　（A基礎理論篇）



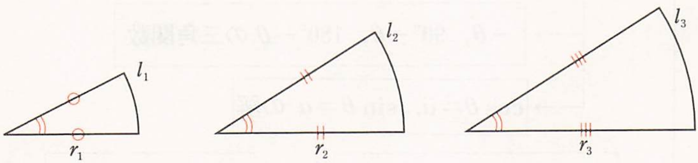
A2.1　弧度法と一般角

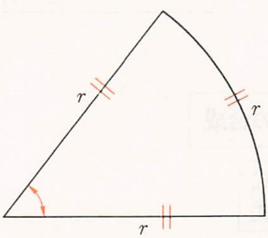
鋭角，直角，さらに鈍角の三角比 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ については数学Iで学んだ．この変数 θ の範囲を拡げ，三角比を θ の関数として見直すのが数学IIで学ぶ三角関数である．そのための最初のステップが，角度という図形的概念を，数としてとらえなおすことであり，これが弧度法（こどほう）である．弧度法は初学者にとって躓（つまず）きの石となっている，という教育的ないし衆愚政策的恩情から今回の指導要領では，数学IIから排除されてしまった．しかし理論展開が少し進めば明らかになるように，弧度法なしに三角関数を学ぶのは，音名や階名を知らずに楽曲を学ぶに等しい．そもそも理系諸君なら，数学IIIでは，否応なしに，弧度法を学ぶことになる．本書では，理解力のある読者に対する教育的能率を考えて，初めに，弧度法の考え方を述べる．

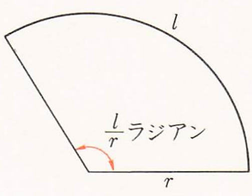
I．弧 度 法*

中心角の等しい扇形は，みな相似であるから，比

$\dfrac{(\text{弧の長さ})}{(\text{半径})}$ の値は，中心角の大きさだけで決まる．







逆に，この比の値そのもので角の大きさを定義しようというのが弧度法の考え方である．

弧度法における角の単位を **1ラジアン** というが，上の定義から明らかなように，角は，長さや面積と違い，単位が不要な無名数である．

半径 r の円において，長さ ℓ の弧に対する中心角の大きさは

$$\frac{l}{r}\ \text{ラジアン}$$

である．

とくに，半円周の長さは円の半径の π 倍で，半円周の中心角は $180°$ だから，ラジアンと従来の度との間の換算について

$$180° = \pi \text{ ラジアン},\quad 1 \text{ ラジアン} = \frac{180°}{\pi}$$

が成り立つ．さらに，弧度法では角度は無名数なので単位名「ラジアン」を省略して書くことが普通である．この意味では

$$\pi = 180°$$

ラジアンの換算

1° 例 $90° = \frac{\pi}{2}$, $60° = \frac{\pi}{3}$, $45° = \frac{\pi}{4}$, $30° = \frac{\pi}{6}$

2° 六十分法で $x°$ の角が弧度法では y (ラジアン) であるとすれば

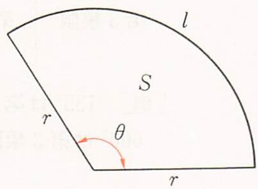
$$x = \frac{180}{\pi} y,\qquad y = \frac{\pi}{180} x$$

3° 弧度法を用いると，円弧の長さや，扇形の面積を表す式が簡単になる．

半径 r の円の，中心角が θ の扇形について

弧の長さ $l = r\theta$，扇形の面積 $S = \frac{1}{2} r^2 \theta$

扇形の弧の長さ・面積



II. 一 般 角

角を半直線 OP が O のまわりに回転した量を表すものとすれば，平角 $(180° = \pi)$ より大きい角，さらに 1 回転の角 $(360° = 2\pi)$ より大きい角や，負の角を考えることができる．

このように意味をひろげた角を **一般角** という．

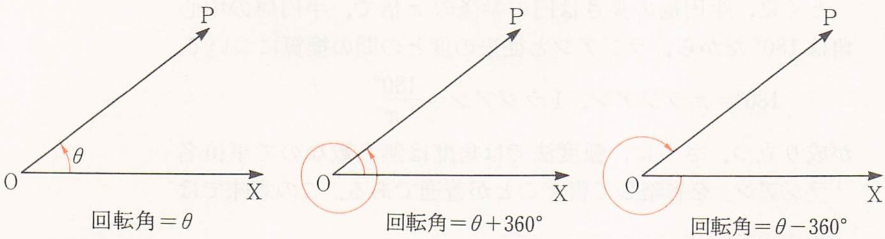
回転する半直線 OP を **動径**，その最初の位置 OX を **始線** という．

動径の回転が反時計まわりのとき，角の大きさは正で，時計まわりのとき，角は負であるとする．

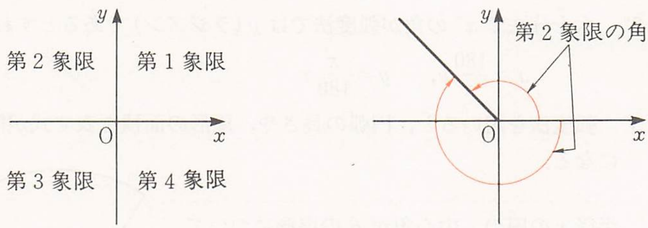
角 $360° = 2\pi$ だけ回転すると動径は 1 回転して，同じ位置にくるから，

角 $\theta + 360° \times n$ (n は整数)
の動径はすべて同一の位置にある

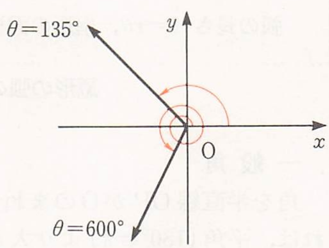
一般角と動径の位置



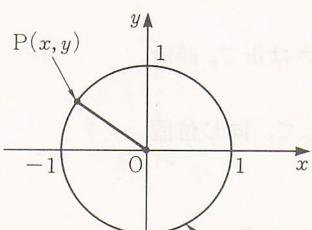
1°　始線 OX を座標平面上の x 軸の正の部分と一致させるとき，動径がどの象限に来るかによって，角についても何象限の角という言い方をする．



例　135° は第 2 象限の角，
600° は第 3 象限の角



A2.2 三角関数の定義



ここでは一般角について sin，cos，tan をあらためて定義する．

I．定　義

座標平面上で，原点を中心とする半径 1 の円を **単位円** という．この単位円周上の 1 点 P の位置は，x 軸の正方向を始線としたときの動径 OP の回転角（一般角とする）θ を与えると定まる．

したがってPの座標を$(x,\ y)$とすると，x，yのそれぞれは角θをきめると定まる．

　　θに対してxを対応させる関数を **余弦関数**

　　θに対してyを対応させる関数を **正弦関数**

といい，この関係を

$$x=\cos\theta,\ \ y=\sin\theta$$

cos，sin の定義

と書く，さらに，

θに対して$\dfrac{y}{x}$を対応させる関数を **正接関数** といい，

$$\frac{y}{x}=\tan\theta$$

tan の定義

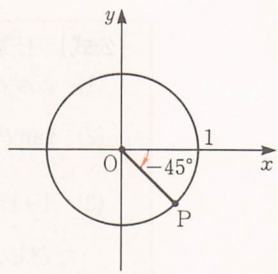
と書く．ただし，$x=\cos\theta=0$ となるθの値に対しては$\tan\theta$の値は定めない．

　余弦，正弦，正接関数などをまとめて **三角関数** という．

1°　例1　図の $\theta=-45°$ に相当する単位円周上の点Pは，$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$である．よって，

$\cos(-45°)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin(-45°)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan(-45°)=-1$



例2　$\theta=0°$ に対しては$\mathrm{P}(1,\ 0)$である．

∴　$\cos 0°=1$，$\sin 0°=0$，$\tan 0°=0$．

　$\theta=90°$ に対しては$\mathrm{P}(0,\ 1)$である．

∴　$\cos 90°=0$，$\sin 90°=1$，$\tan 90°$ は定義されない．

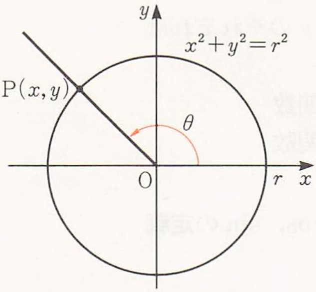
2°　注意　一般に $\theta=\pm 90°+360°\times n$（$n$は整数）（いいかえれば，$\theta=90°+180°\times m$（$m$は整数））のときには，$\tan\theta$は定義されない．

3°　三角関数のとる値の符号は，その角の属する象限で，右の表のように決まる．

　これは，点$(x,\ y)$が各象限に属す際の符号を考えれば，明らかなことである．

象限	1	2	3	4
$\sin\theta$	+	+	−	−
$\cos\theta$	+	−	−	+
$\tan\theta$	+	−	+	−

4°　三角関数を定義する際，必ずしも，半径1の円にこだわる必要



はない．実際，半径 r の円 $x^2+y^2=r^2$ を用いたときは，次のようになる．

x 軸の正の向きと θ の角をなす動径とこの円の交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすれば，

$$\cos\theta=\frac{x}{r},\ \sin\theta=\frac{y}{r},\ \tan\theta=\frac{y}{x}$$

と定義される．

5°　応用上，大切なのは，この定義から得られる次の関係である．

点Pが，原点Oから r の距離にあり，かつ，
動径 OP の，x 軸からの角が θ であるならば，
$\mathrm{P}(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$

6°　以上で定められた一般角の三角関数は，特に θ が正の鋭角 $(0°<\theta<90°)$ のときや正の鈍角 $(90°<\theta<180°)$ のときには，数学Ⅰで学んだ三角比の定義と一致している．

Ⅱ．三角関数の間の関係

三角関数の基本関係

［公式］　任意の θ に対して，

(1)　$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

(2)　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(3)　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

ただし，(2)，(3)では，$\cos\theta\neq0$ とする．

1°　(1)における $\cos^2\theta$ のように，三角関数では，n が自然数のとき $(\cos\theta)^n$ のことをふつう $\cos^n\theta$ と書く．

2°　(1)は，点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ が単位円 $x^2+y^2=1$ の周上にあることからわかる．

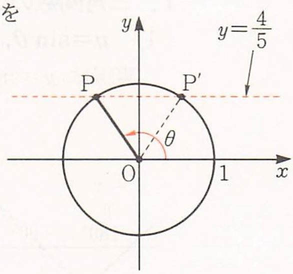
(2)は，$\tan\theta$ の定義そのものである．

(3)を導くには，(1)の両辺を $\cos^2\theta$ で割って，(2)を代入する．

3°　$\cos\theta$，$\sin\theta$，$\tan\theta$ のうちどれか１つの値が定まると，上の公式を利用して残りの三角関数の値の絶対値を決定できる．

さらに，θ がどの象限に属するかもわかれば，残りの三角関数の値が求められる．

例　$\sin\theta=\frac{4}{5}$ で，θ が第2象限の角であることを既知とする．



$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ より

$$\cos\theta=\pm\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\pm\frac{3}{5}$$

θ が第2象限の角なら，$\cos\theta<0$ であるから

$$\cos\theta=-\frac{3}{5},\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{4}{3}$$

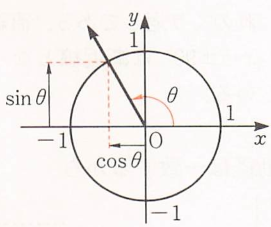
［注］ 以上で述べた三角関数の他に sec（セカント），cosec（コセカント），cot（コタンジェント）という三角関数がある．これらは，sin，cos，tan を用いて次のように表せるので今ではあまり用いられない．

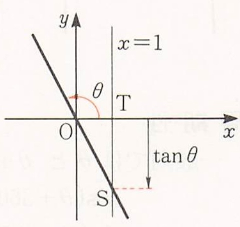
$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta},\ \mathrm{cosec}\,\theta=\frac{1}{\sin\theta},\ \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

A2.3　三角関数の性質

三角関数 $y=\sin\theta$，$y=\cos\theta$，および $y=\tan\theta$ のグラフの概形を描くには，θ のさまざまな値に対し，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値がわかればよいが，特別の場合を除き簡単な計算法はない．下の図が示すような三角関数の値の作図法を用いる．近似的には三角関数の数表や三角関数のキーをもつ電卓を利用して値を見出すのが実用的である．精密な作図は難しいが，下図の関係を利用すると，大雑把（おおざっぱ）にグラフの振る舞いをとらえることができる，

図において，円Oは単位円 $x^2+y^2=1$，直線TSは直線 $x=1$ である．

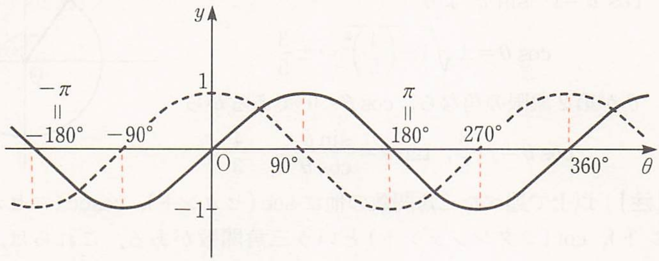




I．三角関数のグラフ

1) $y=\sin\theta$，$y=\cos\theta$ のグラフ

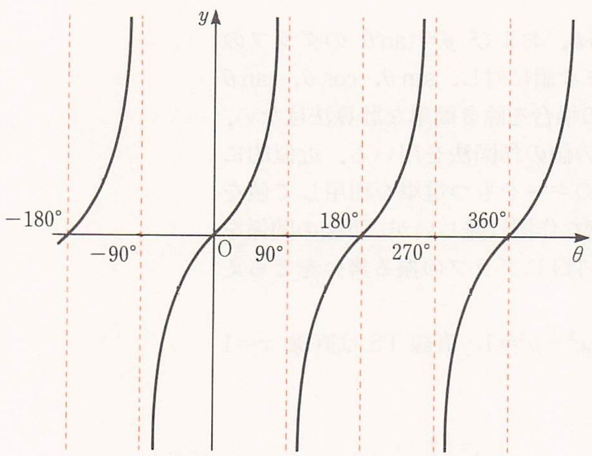
実線は $y=\sin\theta$　　破線は $y=\cos\theta$



1° $y=\cos\theta$，$y=\sin\theta$ はともにすべての θ の値に対し定義される．関数のとりうる値の範囲は $\{y \mid -1 \leqq y \leqq 1\}$ である．

2° $\cos\theta$，$\sin\theta$ は θ の値が $360°$ 増すと，同じ値をとる．したがって $y=\cos\theta$，$y=\sin\theta$ のグラフは，たとえば $0° \leqq \theta < 360°$ の範囲のグラフのくり返しである．☞「II．周期性」

3° $y=\cos\theta$ のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを θ 軸の方向に $-90°$ だけ平行移動したものである．☞ p.87 Ⅲ 3°



2) $y=\tan\theta$ のグラフ

1° $y=\tan\theta$ が定義されるのは

$\theta \neq 90° + 180° \times m$
（m は整数）

となる θ に対してだけである．

一方，$y=\tan\theta$ のとりうる値の範囲は実数全体 R である．

2° $y=\tan\theta$ のグラフは $-90° < \theta < 90°$ の範囲でのそれのくり返しである．直線 $x=\pm 90°$ は漸近線となっている．

II．周 期 性

1) 一般角では θ と $\theta+360°$ の動径は一致するから

$$\left.\begin{array}{l}\cos(\theta+360°)=\cos\theta \\ \sin(\theta+360°)=\sin\theta\end{array}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立つ．このことは，$\cos\theta$，$\sin\theta$ のグラフを左右に 360° だけ平行移動しても変わりがないことを意味している．したがって，これらの関数の値の変化は，$0 \leqq \theta \leqq 2\pi = 360°$ の間の変化のくり返しである．すなわち

cos θ，sin θ の周期

$\cos\theta$，$\sin\theta$ は周期 $2\pi = 360°$ の周期関数

である．

1°　①をくり返し用いれば，たとえば

$$\begin{aligned}\cos(\theta+1080°) &= \cos((\theta+720°)+360°)\\ &= \cos(\theta+720°)\\ &= \cos((\theta+360°)+360°)\\ &= \cos(\theta+360°) = \cos\theta\end{aligned}$$

がわかる．一般に

$$\left.\begin{aligned}\cos(\theta+360°\times n) &= \cos\theta\\ \sin(\theta+360°\times n) &= \sin\theta\end{aligned}\right\}\ (n \text{ は整数}) \qquad \cdots\cdots\text{②}$$

である．もっとも，θ と $\theta+360°\times n$ の動径が一致することを考えれば，①を用いるまでもなく，ただちに②が成り立つことがわかろう．

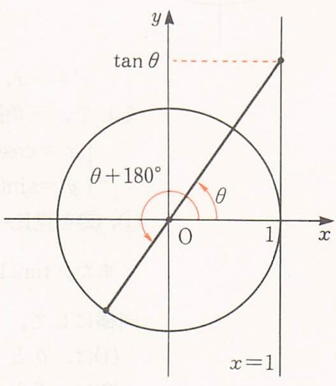
2)　$\tan\theta$ については，右の図からわかるように，θ と $\theta+180°$ において値が一致する．すなわち

$$\tan(\theta+180°) = \tan\theta \qquad \cdots\cdots\text{③}$$

が成り立つ．すなわち

$\tan\theta$ は周期 $\pi = 180°$ の周期関数

tan θ の周期性



1°　③より n が整数のとき

$$\tan(\theta+180°\times n) = \tan\theta$$

が成り立つ．

III. 負角，余角，補角の公式

［公式］　一般に，次の等式が成り立つ．

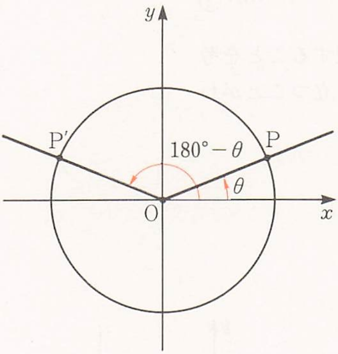
(1)　$\cos(-\theta)=\cos\theta$，$\sin(-\theta)=-\sin\theta$，
$\tan(-\theta)=-\tan\theta$　　**負角の公式**

(2)　$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$，$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$，
$\tan(90^\circ-\theta)=\dfrac{1}{\tan\theta}$　　**余角の公式**

(3)　$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$，$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$，
$\tan(180^\circ-\theta)=-\tan\theta$　　**補角の公式**

ただし，tan が現れるときには，両辺が定義できるような θ の値に限る．

1°　頭から覚えようとするとめんどうな公式であるが，2°に記す証明を再現しながらなじんでいけば身につく．



なお，余角，補角といった用語は最近の教科書かrら消えてしまっているので，念のために書いておくと，

θ の余角＝θ と加えれば直角になる角＝直角－θ

θ の補角＝θ と加えれば平角になる角＝平角－θ

がその定義である．

2°　例として(3)の証明をあげておく．

θ と $180^\circ-\theta$ の定める2つの動径は，y 軸に関して対称である．したがって，これらの動径と単位円の交点を $P(x,\ y)$，$P'(x',\ y')$ とすると，この2点は y 軸に関して対称だから

$$x'=-x,\quad y'=y \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

そして，三角関数の定義から

$$\begin{cases} x'=\cos(180^\circ-\theta) \\ y'=\sin(180^\circ-\theta), \end{cases} \quad \begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

①，②を見比べると，$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$，$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$．

また，$\tan(180^\circ-\theta)=\dfrac{\sin(180^\circ-\theta)}{\cos(180^\circ-\theta)}=\dfrac{\sin\theta}{-\cos\theta}=-\tan\theta$．■

同様にして，

(1)は，θ と $-\theta$ の動径が x 軸に関し対称なこと

(2)は，θ と $90^\circ-\theta$ の動径が直線 $y=x$ に関し対称なこと

から導かれる．

3°　(1), (2)を用いると，

$$\sin(\theta+90^\circ)=\sin(90^\circ-(-\theta))=\cos(-\theta)=\cos\theta \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

このようにして類似の公式を導くことができる．

①は，$y=\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に -90° だけ平行移動すると $y=\cos\theta$ のグラフになることを示している．

4°　これらの諸公式と周期性とを用いれば，一般角の三角関数の値は，それを鋭角の三角関数の値になおして求めることができる．

例　$\cos 1190^\circ=\cos(360^\circ\times3+90^\circ+20^\circ)=\cos(90^\circ+20^\circ)=-\sin 20^\circ$

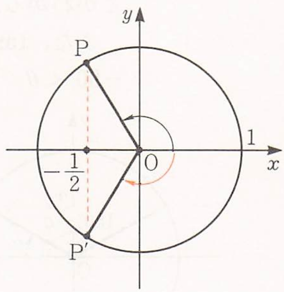
IV. 基本的な三角方程式

1)　たとえば，$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ ·········①　を考えてみよう．

右の図からわかるように，$\cos\theta$ の1周期分 $-180^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲内に①を満たす角は2つあって，

$$\theta=\pm120^\circ \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

である．



$\cos\theta$ は基本周期 360° の周期関数であるから，①のすべての解は

$$\theta=\pm120^\circ+360^\circ\times n \ (n \text{ は整数}) \cdots ③$$

と表される．②に対し，③を①の **一般解** ともいう．

このようにして，次の定理が得られる．

$\cos\theta=a$ の解

[定理1]　a が $-1 \leqq a \leqq 1$ を満たすとき，θ の方程式

$$\cos\theta=a$$

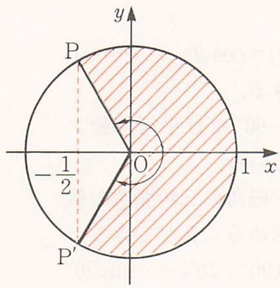
の1つの解 $\alpha\,(0^\circ<\alpha<180^\circ)$ が見つかれば，一般解は

$$\theta=\pm\alpha+360^\circ\times n \ (n \text{ は整数})$$

で与えられる．

1°　“$\cos\theta=\cos\alpha$ なら $\theta=\alpha$ である”というような単純な推論は通用しない．

2°　三角不等式の一般解についても同様に，図を手がかりとすると



よい．たとえば

$\cos\theta > -\frac{1}{2}$　………①　ならば，

$\cos\theta$ の1周期分 $-180° \leqq \theta \leqq 180°$ の範囲では

$-120° < \theta < 120°$　………②

周期性を考えて一般解は

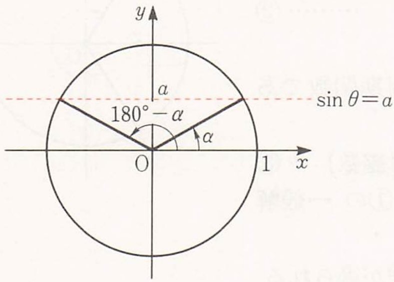
$-120° + 360° \times n < \theta < 120° + 360° \times n$

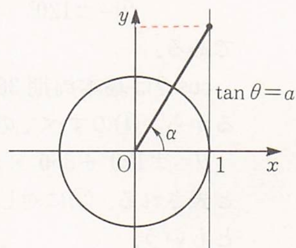
（n は整数）

である．

2）三角方程式 $\sin\theta = a(-1 \leqq a \leqq 1)$ の解法も図をたよりにするとよい．$\sin\theta$ の1周期分にあたる $-90° \leqq \theta \leqq 270°$ の範囲内に，$\theta = \alpha$，$180° - \alpha$ の関係にある2つの解があることがわかる．

また，$\tan\theta = a$ を満たす θ の値は $\tan\theta$ の1周期分 $-90° < \theta < 90°$ に1つだけある．





このようにして，

［定理2］（1）$-1 \leqq a \leqq 1$ のとき，θ の方程式

$\sin\theta = a$　の一般解は

$\theta = \alpha + 360° \times n$，$\theta = (180° - \alpha) + 360° \times n$

（n は整数）

ただし，α は $-90° \leqq \alpha \leqq 90°$，$\sin\alpha = a$ を満たす角

（2）任意の実数値 a に対して，θ の方程式

$\tan\theta = a$ の一般解は　$\theta = \alpha + 180° \times n$

（n は整数）

ただし，α は $-90° < \alpha < 90°$，$\tan\alpha = a$ を満たす角

$\sin\theta = a$ の解

$\tan\theta = a$ の解

1°　$\sin\theta=a$ の一般解は，まとめて $\theta=(-1)^n a+180°\times n$（$n$ は整数）とも書ける．

2°　例　$\sin\theta=\frac{1}{2}$ の一般解は $\theta=(-1)^n\cdot 30°+180°\times n$（$n$ は整数）

A2.4 加法定理とその応用

Ⅰ．正弦，余弦の加法定理

sin，cos の加法定理

［定理］

(1)　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

(2)　$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

(3)　$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

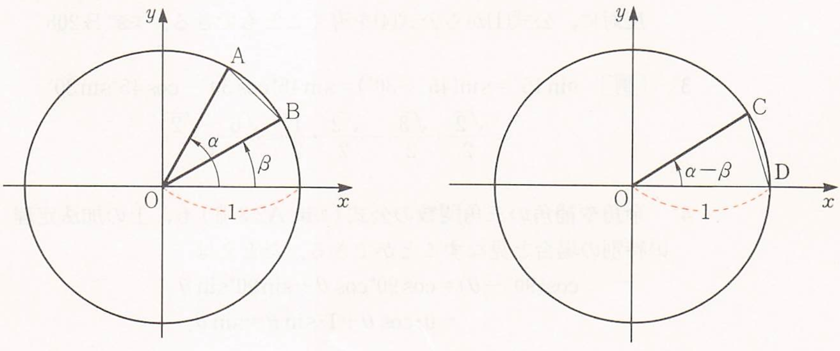
(4)　$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

1°　三角関数を使いこなすカギとなる重要な公式であるので完全にマスターする必要がある．

2°　この定理には，いろいろな証明法があるが，発想の流れが自然なものは，組立てが難しく，組み立ての易しいものは，流れが変則的になりがちである．各自の教科書には，その一つが苦心して記されているはずである．ここでは距離の公式を利用した証明を紹介する．

◈ **sin，cos の加法定理の証明** ◈

(a)　まず(4)から証明する．与えられた角 α，β に対して，単位円周上に2点 A，B，をとり（☞下左図），これを回転して，C，D とする（☞下右図）．



これら3点の座標はそれぞれ

$$A(\cos\alpha,\ \sin\alpha),\ B(\cos\beta,\ \sin\beta),\ C(\cos(\alpha-\beta),\ \sin(\alpha-\beta))$$

である．☞A2.2 I

さて，△AOB は △COD と合同であるから，AB＝CD である．

一方，2点間の距離の公式により

$$
\begin{aligned}
AB^2 &= (\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2\\
&= (\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta)+(\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta)\\
&= (\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+(\cos^2\beta+\sin^2\beta)-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\\
&= 2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta) \qquad \cdots\cdots\cdots ①
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
CD^2 &= (\cos(\alpha-\beta)-1)^2+\sin^2(\alpha-\beta)\\
&= \{\cos^2(\alpha-\beta)-2\cos(\alpha-\beta)+1\}+\sin^2(\alpha-\beta)\\
&= \{\cos^2(\alpha-\beta)+\sin^2(\alpha-\beta)\}+1-2\cos(\alpha-\beta)\\
&= 2-2\cos(\alpha-\beta) \qquad \cdots\cdots\cdots ②
\end{aligned}
$$

①と②を $AB^2=CD^2$ に代入すると公式(4)が得られる．

［注］ $\alpha-\beta$ が鋭角である場合，△OAB で余弦定理を用いれば，

$$
\begin{aligned}
AB^2 &= OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cdot\cos\angle AOB\\
&= 1+1-2\cos(\alpha-\beta) \qquad \cdots\cdots\cdots ②'
\end{aligned}
$$

が，ただちに出てくる．

(b) 公式(4)で，β を $-\beta$ でおきかえ，

$$\cos(-\beta)=\cos\beta,\ \sin(-\beta)=-\sin\beta$$

を用いれば公式(2)が得られる．

(c) 次に公式(2)の α を $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ すなわち，$90°-\alpha$ でおきかえ

$$\cos(90°-\alpha+\beta)=\cos(90°-(\alpha-\beta))=\sin(\alpha-\beta)$$

$$\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha, \qquad \sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$$

を用いれば公式(3)が得られる．

(d) 最後に公式(3)の β を $-\beta$ でおきかえて公式(1)が導かれる．■

反対に，公式(1)から公式(4)を導くこともできる．☞B.208

3°　例　$\sin 15°=\sin(45°-30°)=\sin 45°\cos 30°-\cos 45°\sin 30°$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

4°　余角や補角の三角関数の公式（☞A2.3 Ⅲ）も，上の加法定理の特別の場合と見なすことができる．たとえば

$$
\begin{aligned}
\cos(90°-\theta) &= \cos 90°\cos\theta+\sin 90°\sin\theta\\
&= 0\cdot\cos\theta+1\cdot\sin\theta=\sin\theta
\end{aligned}
$$

II．正接の加法定理

tan の加法定理

[定理]

(1)　$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

(2)　$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

1°　正弦，余弦の加法定理の式を辺々割り算すれば得られる．

2°　例 1　$\tan 75^\circ=\tan(30^\circ+45^\circ)=\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{3}}+1}{1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot 1}=2+\sqrt{3}$

例 2　$\tan(45^\circ-\theta)=\dfrac{\tan 45^\circ-\tan\theta}{1+\tan 45^\circ\tan\theta}=\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$

III．倍角の公式

正弦，余弦，正接の加法定理で $\alpha=\beta=\theta$ とおくことにより，次の公式がすぐに得られる．

2 倍角の公式

[公式]

(1)　$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

(2)　$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

(3)　$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

1°　$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ という関係から，(2)は

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$　………(2)′

$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$　………(2)″

と変形することができる．

2°　(2)′，(2)″ は，

半角の公式

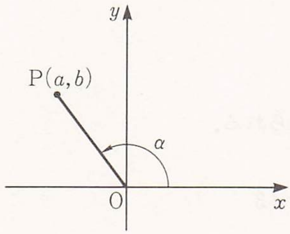
[公式]

(4)　$\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$　(5)　$\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

と書きなおすことができる．

Ⅳ．三角関数の合成の公式

sinの加法定理の最も重要な応用として，$\sin\theta$と$\cos\theta$の1次式 $a\sin\theta+b\cos\theta$ を $r\sin(\theta+\alpha)$ （rとαはa，bで定まる定数）の形になおす方法がある．



［定理］　任意のa，bに対し，適当にαをとって，

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

とできる．αは，$a=b=0$ でないとき，

座標平面で，原点Oから点P$(a,\ b)$に向う動径OPがx軸の正方向となす角である．

1°　**証明**：$a=b=0$ でないとき，

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right)$$

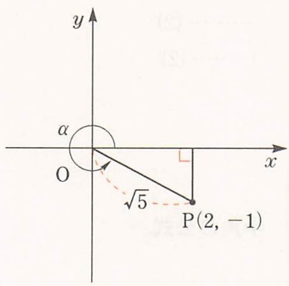
となる．ここで$\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$は2乗の和が1になるので

$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\[2ex]\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}$$

とおくことができる．よって

$$\begin{aligned}a\sin\theta+b\cos\theta&=\sqrt{a^2+b^2}(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)\\&=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)\end{aligned}$$

$a=b=0$ のときは，αは任意の角でよい．



2°　例1　$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+45°)$

例2　$2\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)$

ただし，αは $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ を満たす角

3°　この公式は応用が広い．たとえば $a\sin x+b\cos x$ の形の関数の最大値，最小値問題に用いられる．

例　$f(x)=2\sin x-\cos x$ は，$f(x)=\sqrt{5}\sin(x+\alpha)$，($\alpha$ はしかるべき角)と変形できる．もし，x が任意の実数値をとるなら，

$$\text{最大値}=\sqrt{5},\qquad \text{最小値}=-\sqrt{5}$$

が得られて解決する．この場合，α が具体的にどんな角か，の考察は不要である．

しかし x の変域に制限があるならば，このように簡単ではない．

ガイド ☞B.212

A 2.5　三角関数のいろいろな公式　[補足]

以下の公式は，数学IIの範囲では登場する機会が多くないが，余力のある人は，一通り，理解しておくことをすすめる．数学IIIでは，しばしば出てくるものである．

I．積を和(または差)に変える公式

sin についての加法定理の 2 式

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

を加え合せると，

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$

が得られる．これより

[公式]　$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

が導かれる．同様にして

[公式]　$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}$$

1°　右辺から左辺を導くのはたやすい．
　　左辺の形を右辺の形に書き直すところに意味がある．

2°　例　$2\sin 2x\cos x=\sin 3x+\sin x$
　　　　$2\sin 2x\sin x=\cos x-\cos 3x$

ガイド☆　応用例は　☞B.223，B.228

II．和（または差）を積に変える公式

積を和に直す公式において，$\alpha+\beta=A$，$\alpha-\beta=B$ とおけば次の公式が導かれる．

［公式］

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

1°　例1　$\sin\theta+\sin 3\theta=2\sin 2\theta\cos\dfrac{\theta}{2}$
　　　　$\cos 9\theta-\cos\theta=-2\sin 5\theta\sin 4\theta$

ガイド☆　応用例は　☞B.224～B.228

——A 2　おわり——



Repos

魔女のスランプ

練習のとき難なく弾けた曲が人の前に立つと弾けなくなってしまうということをよく聞きます．それも技術的に難しいところで緊張のために指がもつれるのではなく，また単に気を抜いたというのでもありません．ふだん何でもなかった所である音に気を取られたとたん音楽を見失いあわててその場を取り繕いながら音の脈絡を必死で探すという場面……経験のある人もいることでしょう．これはもしかしたら聴いていながら本当には聴いていなかった音や弾いていながら本当には弾いてなかった音がそのときふと耳に入るようになったからではないでしょうか．いままで指が覚えていたにすぎない音楽をあるきっかけで耳が聴き出した，そのために指が混乱したのではないかと思うのです．考えなくても答は出せる，考えない方が答を出せる……数学にもありそうなことですね．

「魔女の宅急便」というアニメーションがありました．それは子供の魔女キキが一人前の魔女になるための修行として黒猫のジジと一緒に人間の街に住み，はじめて自分の弱さと孤独に向い合い親切な人々に勇気づけられて生きて行くという物語でした．そのなかで，あるとき急にキキの魔力が弱まり空を飛べなくなるという話がありましたね．それは彼女がそれまで見ていなかったものを見，考えていなかったことを考えるようになったからということのようです．

すらすら前に進むことだけが進歩ではありません．何かができるようになることだけが成長ではありません．今までできていたことがある時できなくなる，ここに進歩の鍵があるのではないでしょうか．

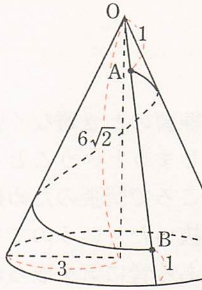


B. 201

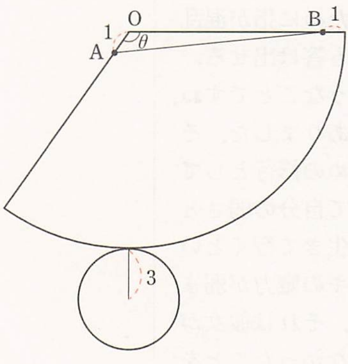
底面の半径が3，高さが$6\sqrt{2}$である直円すいについて，次の問に答えよ．

(1)　全表面積を求めよ．

(2)　図のA，Bを，図のように糸で結ぶとき，糸の最短の長さを求めよ．



アプローチ　扇形の面積を求めるときは弧度法を使うのが便利です．教科書で習うことがありませんから，最初にその練習をしましょう．(☞A2.1 I の3°)



解答　(1)　底面の半径3，高さ$6\sqrt{2}$であるから，母線の長さは，側面の扇形の半径で，

$$r=\sqrt{3^2+(6\sqrt{2})^2}=\sqrt{81}=9$$

である．また，側面の扇形の弧の長さlは底面の円周の長さに等しく

$$l=2\cdot 3\pi=6\pi$$

であり，この扇形の中心角θは，弧度法により

$$\theta=\frac{6\pi}{9}=\frac{2}{3}\pi\ (\text{ラジアン})$$

と表される(☞A2.1 I)．従って，側面積は，扇形の面積の公式により

$S=\dfrac{1}{2}r^2\theta$

$$S=\frac{1}{2}\cdot 9^2\cdot\frac{2}{3}\pi=27\pi$$

となる．これに底面積9πを加え，全表面積 $\boldsymbol{36\pi}$ を得る．

(2)　展開図における三角形OABにおいて，余弦定理を用いると

$$AB^2=1^2+8^2-2\cdot 1\cdot 8\cdot\cos\frac{2}{3}\pi$$

$$=65-16\cos 120°=73$$

よって糸の最短の長さ $\boldsymbol{\sqrt{73}}$ を得る．

B. 202

$\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$ のとき，次式の値を求めよ．

(1)　$\sin\alpha\cos\alpha$　　　　(2)　$\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$

解答　(1)　$\sin\alpha\cos\alpha$

$$=\frac{1}{2}\{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-1\right)=-\mathbf{\frac{3}{8}}$$

(2)　$\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$

$$=(\sin\alpha+\cos\alpha)^3-3\sin\alpha\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)$$

$$=\frac{1}{8}-3\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{11}{16}}$$

B. 203

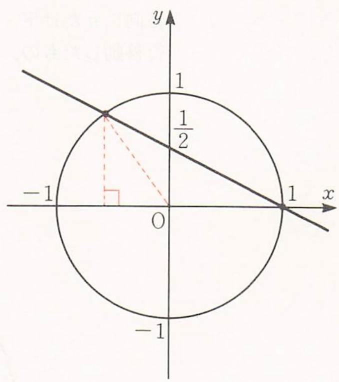
$2\sin\theta+\cos\theta=1$ ……①　のとき $\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ．

アプローチ　単に①の両辺を平方してもうまくいきません．$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の間には，つねに

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

という関係が成立するので，本問は，①，②の連立方程式を解く問題と同じことになります．

また，これは，三角関数の定義に戻れば，xy 平面上で，単位円 $x^2+y^2=1$ と直線 $2y+x=1$ の交点の座標を求める問題であるともいえます．さらに，これは，B.210 以降で学ぶ‘合成’を用いて解くこともできます．



解答　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \quad \cdots\cdots\cdots ②$

①，②から，$\cos\theta$ を消去すると，

$$\sin^2\theta+(1-2\sin\theta)^2=1$$

$$\therefore\quad \sin\theta(5\sin\theta-4)=0$$

$$\therefore\quad \sin\theta=0 \text{ または } \sin\theta=\frac{4}{5}$$

となるので，これらを①に代入して $\cos\theta$ の値が求まる．

$$\therefore\quad (\sin\theta,\ \cos\theta)=(\mathbf{0},\ \mathbf{1}) \text{ または } \left(\mathbf{\frac{4}{5}},\ -\mathbf{\frac{3}{5}}\right)$$

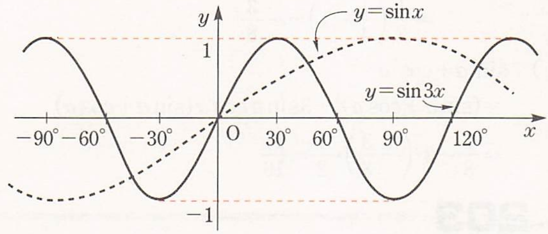
B. 204

次のグラフをかけ.

(1) $y=\sin 3x$　　(2) $y=\sin(3x-90^\circ)$

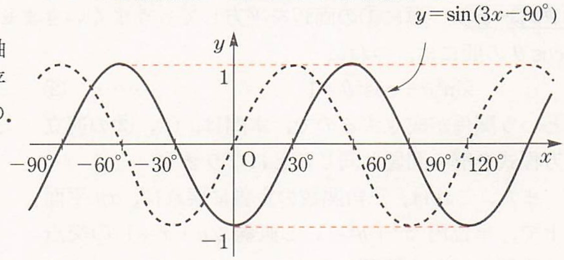
(3) $y=2\sin(3x-90^\circ)$　　(4) $y=2\sin(3x-90^\circ)+1$

解答 (1) $y=\sin 3x$ のグラフは，$y=\sin x$ のグラフを，x 軸方向に $\frac{1}{3}$ 倍したものになる．

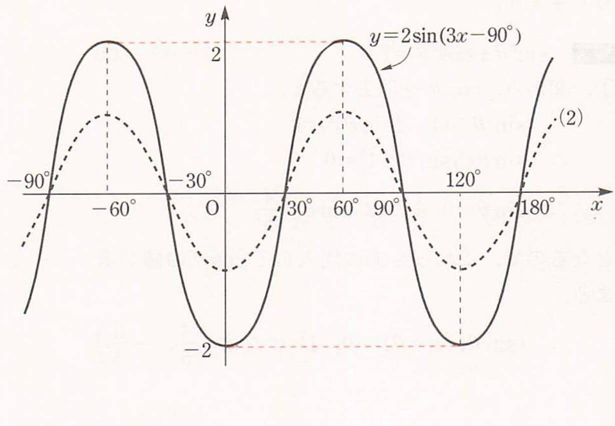


$y=f(x-a)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に a だけ平行移動したもの.

(2) $y=\sin(3x-90^\circ)=\sin 3(x-30^\circ)$ より(1)のグラフを x 軸方向に 30° だけ平行移動する.

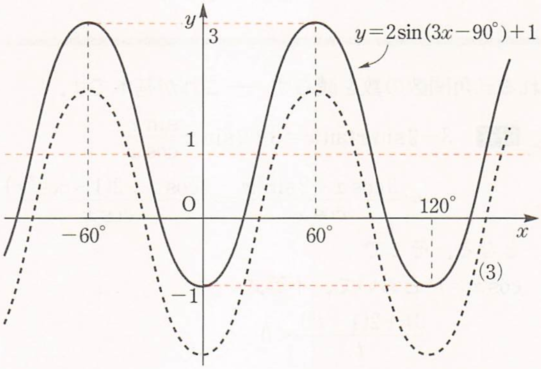


(3) $y=2\sin(3x-90^\circ)$ のグラフは、(2)のグラフを y 軸方向に 2 倍にのばしたものである.



(4)　$y=2\sin(3x-90°)+1$ のグラフは，(3)のグラフを y 軸方向に 1 だけ平行移動したものである．

◀ $y=f(x)+b$ のグラフは，$y=f(x)$ のグラフを y 軸方向に b だけ平行移動したもの．



[注]　xy 平面において，x 軸，y 軸の単位が片や 1°，片や 1 というのでは，グラフをそれらしく書くこともできません．本来，グラフを書くときには，弧度法を使うべきなのですが，ここでは「耐え難きを耐えて」，x 軸に度数法ではかった値を記入しました．

B. 205

方程式 $2\cos^2 x+5\sin x+1=0$ を解け．ただし，$0°\leqq x<360°$ とする．

アプローチ　よく見れば，$\sin x$ についての 2 次方程式にすぎません．

解答　$\cos^2 x=1-\sin^2 x$ より，与えられた方程式は，

$$2(1-\sin^2 x)+5\sin x+1=0$$
$$2\sin^2 x-5\sin x-3=0$$
$$(2\sin x+1)(\sin x-3)=0$$

となる．

$$-1\leqq \sin x\leqq 1$$

でなければならないから，上式が成り立つのは，

$$\sin x=-\frac{1}{2}$$

の場合だけである．

$0°\leqq x<360°$ より　$\boldsymbol{x=210°}$ **または** $\boldsymbol{x=330°}$

を得る．

B.206

不等式 $3+2\sin x\cdot\tan x<0$ を解け．ただし $0°\leqq x\leqq 360°$ とする．

アプローチ 現れる三角関数の数を減らす——これが基本です．

$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ ▶

$\cos x$ に統一 ▶

解答 $3+2\sin x\tan x=3+2\sin x\dfrac{\sin x}{\cos x}$

$$=\frac{3\cos x+2\sin^2 x}{\cos x}=\frac{3\cos x+2(1-\cos^2 x)}{\cos x}$$

となる．そこで

$\cos x=t$ とおいて，不等式

$$\frac{3t+2(1-t^2)}{t}<0$$

を考える．分子を整理すると

$$\frac{-(2t+1)(t-2)}{t}<0$$

分母の符号を考慮して，これを解くと

$$-\frac{1}{2}<t<0 \text{ または } 2<t,$$

ところで，

$$-1\leqq\cos x\leqq 1$$

であるから，与えられた不等式は

$$-\frac{1}{2}<\cos x<0$$

と同値である．

よって $0°\leqq x<360°$ を考慮して，次の解を得る．

$$\mathbf{90°<x<120° \text{ または } 240°<x<270°}$$

［注］ 分数不等式 $-\dfrac{(2t+1)(t-2)}{t}<0$ を解くとき，気楽に分母を払ってはいけない．$t<0$ のときは不等号の向きが逆転するからである．

B. 207

次の連立方程式を解け．

$$\begin{cases} \sin x+\sin y=1 & \cdots\cdots\cdots ① \\ \cos x+\cos y=\sqrt{3} & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

アプローチ　x，y の一方を消去しようと考えます．

解答　①より　$\sin y=1-\sin x$　………　①′

②より　$\cos y=\sqrt{3}-\cos x$　………　②′

◀ ①′②′を満たす y が存在するための条件．

①′^{2}+②′^{2} より　$1=(1-\sin x)^2+(\sqrt{3}-\cos x)^2$

∴　$1=5-2\sin x-2\sqrt{3}\cos x$

∴　$\sin x=2-\sqrt{3}\cos x$　………　③

◀ B.203 と同じタイプ！

これと $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ とから，

$(2-\sqrt{3}\cos x)^2+\cos^2 x=1$　………　③′

∴　$4\cos^2 x-4\sqrt{3}\cos x+3=0$，

∴　$\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　………　④

④を③に代入して

◀ ④だけから x を求めてはならない．③′が③の必要条件にすぎないからである！

$\sin x=\dfrac{1}{2}$　………　⑤

④と⑤より　$x=30^\circ+360^\circ\times n$ （n は整数）………⑥

④，⑤を①′と②′へ代入すると

$$\begin{cases} \sin y=\dfrac{1}{2} \\ \cos y=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}\quad ∴\quad y=30^\circ+360^\circ\times m$$

（m は整数）

∴　$\boldsymbol{x=30^\circ+360^\circ\times n}$，$\boldsymbol{y=30^\circ+360^\circ\times m}$

（**n，m は整数**）

［注］ 1°　③を導いたら，‘合成’を用いて $2\sin(x+60^\circ)=2$ と変形する手もある．そのほか，①^2+②^2 より $\cos(x-y)=1$　∴　$x-y=360^\circ\times k$（k：整数）でなければならないことを導き，これを利用して $\sin y=\sin x$，$\cos y=\cos x$ を出していく方法もある．

2°　$\sin x$，$\cos x$，$\sin y$，$\cos y$ をあらためてそれぞれ x，y，u，v とおけば

$x+u=1$，$y+v=\sqrt{3}$，$x^2+y^2=1$，$u^2+v^2=1$

の連立方程式にすぎない．

B. 208

三角関数の余角公式 $\sin(90°-\theta)=\cos\theta$,

$\cos(90°-\theta)=\sin\theta$

と，正弦関数の加法定理

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots(*)$$

を用いて，余弦関数の加法定理の公式

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots(**)$$

を証明せよ．

アプローチ 教科書では(*)と(**)を別々に習ったかもしれません．しかし，実は一方から他方を導くことができるのです．

解答 公式(*)において

α のかわりに $90°-\alpha$

を入れると，

$$\sin\{(90°-\alpha)+\beta\}=\sin(90°-\alpha)\cos\beta+\cos(90°-\alpha)\sin\beta$$

となる．ここで余角公式を用いると，

$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$ ▶ 左辺 $=\sin\{90°-(\alpha-\beta)\}=\cos(\alpha-\beta)$

$\cos(90°-\theta)=\sin\theta$ ▶ 右辺 $=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

となる．したがって

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

すなわち，(**)が成り立つ．■

[注] 加法定理のさまざまな形はすべて(*)から導くことができる．たとえば(*)において

β　のかわりに $-\beta$

とおくと，

$$\sin\{\alpha+(-\beta)\}=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$$

$$\therefore\quad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

が得られる．

なお，反対に(**)から(*)を導くこともできる．☞ (A2.4 p.90)

B.209

α は第1象限の角，β は第3象限の角で，

$$\sin\alpha=\frac{4}{5},\quad \cos\beta=-\frac{12}{13}$$

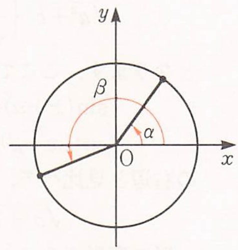
であるとき，$\alpha+\beta$ は第何象限の角か．

アプローチ $\sin(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha+\beta)$ の符号を調べようと考えます．加法定理の基本的な応用です．

解答 α は第1象限の角だから，$\cos\alpha>0$ で，

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$$
$$=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$\therefore\quad \cos\alpha=\frac{3}{5}$$



上図からでも $\alpha+\beta$ の大きさの見当はつくが．

同様に，β は第3象限の角だから，$\sin\beta<0$ で，

$$\sin^2\beta=1-\cos^2\beta$$
$$=1-\left(-\frac{12}{13}\right)^2=\left(\frac{5}{13}\right)^2$$

$$\therefore\quad \sin\beta=-\frac{5}{13}$$

以上の $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\sin\beta$，$\cos\beta$ の値を

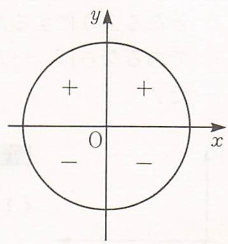
$$\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{cases}$$

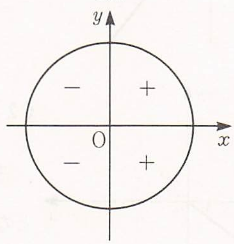
に代入して計算すると，

$$\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{63}{65}<0\\ \cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{16}{65}<0\end{cases}$$

となるので，

$\alpha+\beta$ は **第3象限の角** である．





B. 210

$y=3\sin x-4\cos x$ をそれぞれ次の形に変形せよ．

(1)　$y=r\sin(x+\alpha)$　　　$(r>0,\ 0°\leqq\alpha<360°)$

(2)　$y=r\cos(x+\beta)$　　　$(r>0,\ 0°\leqq\beta<360°)$

アプローチ　一般に，$a\sin x+b\cos x\,(a=b=0$ ではない$)$ は，$\sqrt{a^2+b^2}$ をくくり出すと

$$\sqrt{a^2+b^2}\left\{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\cos x\right\}\quad\cdots\cdots\cdots(*)$$

となります．ここで{　　}の中味を，加法定理

$$\sin(x+\alpha)=\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha$$
$$\cos(x+\beta)=\cos x\cos\beta-\sin x\sin\beta$$

の右辺と見比べて，$(*)$を

$$\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)\ や\ \sqrt{a^2+b^2}\cos(x+\beta)$$

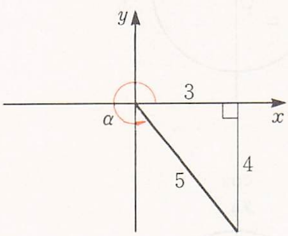
の形に変形することは，**‘合成’** と呼ばれるテクニックです．

☞ A2.4 のIV

[注]　$\sqrt{a^2+b^2}$ をくくり出すのは，$\sin x$ と $\cos x$ の係数を，

“それらの平方の和が1に等しい”

となるようにするためです．一般に，実数 A, B について，$A^2+B^2=1$ であるならば，一方を $\cos\alpha$，他方を $\sin\alpha$ とおくことができるのでした！



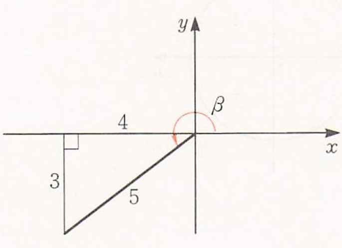
解答　$\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5$

(1)　$y=5\left(\frac{3}{5}\sin x-\frac{4}{5}\cos x\right)$

それゆえ，　$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\sin\alpha=-\frac{4}{5}$

となる角 α をとれば，

$$y=5(\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha)$$
$$=\mathbf{5\sin(x+\alpha)}\ （ただし，\alpha は左図の角）$$



(2)　$y=5\left\{-\frac{4}{5}\cdot\cos x-\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\sin x\right\}$

そこで，　$\cos\beta=-\frac{4}{5}$，$\sin\beta=-\frac{3}{5}$

となる角 β をとれば，

$$y=5(\cos x\cos\beta-\sin x\sin\beta)$$
$$=\mathbf{5\cos(x+\beta)}\ （ただし，\beta は左図の角）$$

B.211

次の2つの単振動を加え，その振幅，周期を求めよ．

$x_1=2\sin(60°\times t+30°)$，$x_2=4\cos(60°\times t-45°)$

解答　$x_1+x_2=2\sin(60°\times t+30°)+4\cos(60°\times t-45°)$

$=2\{\sin(60°\times t)\cdot\cos 30°+\cos(60°\times t)\cdot\sin 30°\}$

$+4\{\cos(60°\times t)\cdot\cos 45°+\sin(60°\times t)\cdot\sin 45°\}$

$=(\sqrt{3}+2\sqrt{2})\sin(60°\times t)+(1+2\sqrt{2})\cos(60°\times t)$

ここで，

$(\sqrt{3}+2\sqrt{2})^2+(1+2\sqrt{2})^2=4(5+\sqrt{2}+\sqrt{6})$

だから，

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{2\sqrt{5+\sqrt{2}+\sqrt{6}}},\quad \sin\alpha=\frac{1+2\sqrt{2}}{2\sqrt{5+\sqrt{2}+\sqrt{6}}}$$

となる α をとると，

$$x_1+x_2=2\sqrt{5+\sqrt{2}+\sqrt{6}}\sin(60°\times t+\alpha)$$

したがって，

振幅 $\mathbf{2\sqrt{5+\sqrt{2}+\sqrt{6}}}$，周期**6**である．

研究　直線上を運動する点の位置が，$x=r\cos(\omega t+\alpha)$ (r，ω，α：定数，$r\geqq 0$) で表される時，Pは単振動をするといい，ω を**角速度**という．

この単振動は，半径 r の円周上を角速度 ω で回転する点を，真上から(回転面上に目を置いて)見たものにほかならない．

一般に，周期の等しい2つの単振動

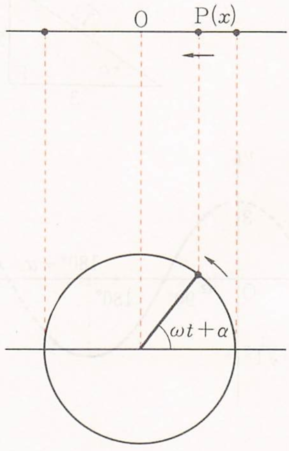
$x_1=r_1\sin(\omega t+\alpha_1)$，$x_2=r_2\sin(\omega t+\alpha_2)$

を加えあわせると，同じ周期の単振動

$x_1+x_2=r_3\sin(\omega t+\alpha)$

(r_3 は，r_1，r_2，α_1，α_2 で定まる定数)

や得られる．周期の異なる単振動を加えたものは，もはや単振動にはならない．☞ C.11

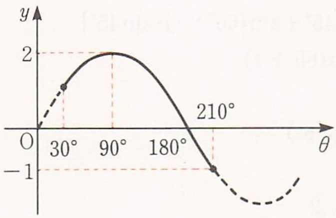


B. 212

次の各関数の最大値・最小値を求めよ．

(1) $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ $(0°\leqq x\leqq 180°)$

(2) $y=3\cos x-2\sin x$ $(0°\leqq x\leqq 180°)$



解答 (1) $y=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x\right)$

$=2\sin(x+30°)$

見やすくするため，$x+30°=\theta$ とおくと

$y=2\sin\theta,\ 30°\leqq\theta\leqq 210°$

となるので，左のグラフを参照して，

$\begin{cases} y\text{の最大値}\ \mathbf{2} \\ y\text{の最小値}\ \mathbf{-1} \end{cases}$

(2) 合成すると，

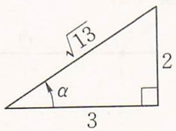
cos で合成したが，sin で合成してもよい．(下の[注]参照)

$y=3\cos x-2\sin x=\sqrt{3^2+(-2)^2}\cos(x+\alpha)$

$=\sqrt{13}\cos(x+\alpha)$

ただし，α は左図に示される角である．

$x+\alpha=\theta$ とおくと



$\begin{cases} y=\sqrt{13}\cos\theta \\ \alpha\leqq\theta\leqq 180°+\alpha \end{cases}$

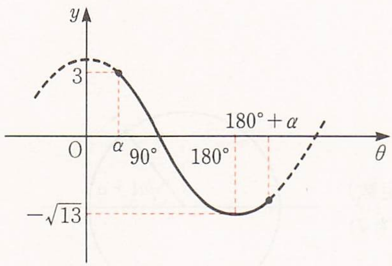
$0°<\alpha<90°$ であるから，左のグラフより，y は

$\theta=\alpha$ で最大，$\theta=180°$ で最小

であることがわかる．よって，

$\begin{cases} \text{最大値}=\sqrt{13}\cos\alpha=\mathbf{3} \\ \text{最小値}=\mathbf{-\sqrt{13}} \end{cases}$

である．



[注] (2)において，sin を用いて合成すると，$y=\sqrt{13}\sin(x+\beta)$，ただし，$\cos\beta=-\dfrac{2}{\sqrt{13}}$，$\sin\beta=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$ となる．

B.213

点 $P(x,\ y)$ が原点を中心に半径1の単位円上を動くとき，$z=xy+x+y+1$ の最大値と最小値を求めたい．

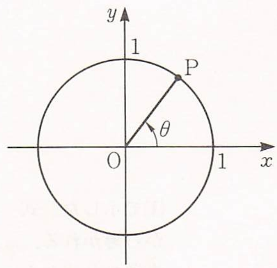
(1)　点 $P(x,\ y)$ が原点Oを中心とする単位円の円周上にあるときの動径OPの表す角を θ とし，z を θ の関数として表せ．

(2)　新しい変数 $t=\cos\theta+\sin\theta$ を導入し，z を t の関数として表せ．

(3)　t の変域を考慮して，z の最大値と最小値を求めよ．

アプローチ　実数 x，y が $x^2+y^2=1$ を満たして変化するとき $z=xy+x+y+1$ の最大・最小を求めよ，という問題には，いろいろなアプローチがあります．本問は，三角関数を利用して解こうというものです．

解答　(1)　$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$



であるので，

$$\boldsymbol{z=\cos\theta\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta+1}$$

(2)　$t=\cos\theta+\sin\theta$　………　①

とおくと，$t^2=1+2\cos\theta\sin\theta$ より，

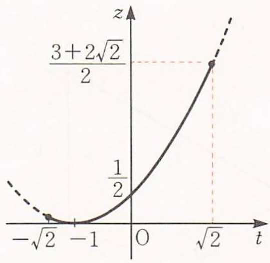
$$\cos\theta\sin\theta=\frac{t^2-1}{2}$$

よって，$z=\dfrac{t^2-1}{2}+t+1=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}(t+1)^2}$　………　②

(3)　①の右辺を合成すると，$t=\sqrt{2}\sin(\theta+45^\circ)$ となる．θ は任意なので，t の変域は，

$$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}\quad\cdots\cdots\cdots\ ③$$

である．



よって，③における②のグラフから，

$$\begin{cases} \text{最大値}=\boldsymbol{\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}} \\ \text{最小値}=\boldsymbol{0} \end{cases}$$

[注]　一般に α，β の対称式は，$\alpha+\beta$ と $\alpha\beta$ の式になるが，

$$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1\}$$

であるので，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の対称式は $\sin\theta+\cos\theta=t$ の式になる．

B.214

(1)　加法定理に基づいて2倍角の公式

$$\begin{cases}\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta\\ \cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta\end{cases}$$

を示せ．

(2)　次の関数の最大値，最小値を求めよ．

$$y=\sin^2 x+4\sin x\cos x+3\cos^2 x\quad(0°\leqq x\leqq 180°)$$

アプローチ (1)　たくさんの公式を覚えきれなくても，導き方さえ修得しておけば，大丈夫．(2)の形を見たら(1)を利用するのが定石です．

解答　(1)　加法定理の基本公式

$$\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{cases}$$

において

$$\alpha=\beta=\theta$$

とおくと，

$$\begin{cases}\sin 2\theta=\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta\\ \cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta\end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases}\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta\\ \cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta\end{cases}\ ■$$

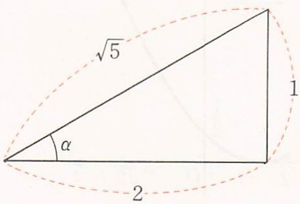
(1)で示した公式から導かれる．半角の公式ともいう．

(2)

$$\begin{cases}\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2},\ \cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}\\ \sin x\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x\end{cases}$$

であるから

$$\begin{aligned}y&=\frac{1-\cos 2x}{2}+2\sin 2x+3\frac{1+\cos 2x}{2}\\ &=2\sin 2x+\cos 2x+2\\ &=\sqrt{5}\sin(2x+\alpha)+2\quad(\alpha\text{ は，左図の定角})\end{aligned}$$



ここで，$2x+\alpha$ は，幅 360° の範囲を変化するので，

$$\begin{cases}y\text{ の最大値は，}\sqrt{5}+2\\ y\text{ の最小値は，}-\sqrt{5}+2\end{cases}$$

となる．

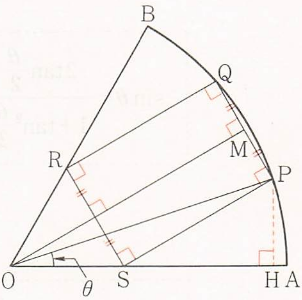
B. 215

半径1，中心角 60° の扇形のOABがある．弧AB上に2点P，Q，線分OA上に点S，線分OB上に点Rを四角形PQRSが長方形になるようにとる．

(1)　$\angle AOP=\theta$ とするとき，線分PQの長さを θ で表せ．

(2)　長方形PQRSの面積を最大にする θ およびそのときの面積を求めよ．

アプローチ　(1)「円の任意の弦に中心から下ろした垂線の足は，その弦を二等分する」という円の幾何学的性質に注目しましょう．



解答　**(1)**　PQに垂線OMを下ろすと，OMは $\angle AOB$ を，Mは線分PQを二等分する．

$$PQ=2PM=2OP\sin(30^\circ-\theta)$$
$$=\mathbf{2\sin(30^\circ-\theta)}$$

(2)　PからOAに垂線PHを下ろすと，$\angle PSH=30^\circ$ であることから，

$$PS=2PH=2OP\sin\theta=2\sin\theta$$

よって，長方形PQRSの面積 S は

$$S=PQ\cdot PS=2\sin(30^\circ-\theta)\cdot 2\sin\theta$$
$$=2\cos\theta\sin\theta-2\sqrt{3}\sin^2\theta$$　◁加法定理で展開
$$=\sin 2\theta-\sqrt{3}(1-\cos 2\theta)$$　◁2倍角の公式 ☞前問
$$=2\sin(2\theta+60^\circ)-\sqrt{3}$$　◁合成

θ の範囲が $0^\circ<\theta<30^\circ$ であることより，

$$2\theta+60^\circ=90^\circ$$

つまり，$\boldsymbol{\theta=15^\circ}$ のとき，S は　**最大値**$\mathbf{=2-\sqrt{3}}$ をとる．

B.216

$\tan\dfrac{\theta}{2}=t$ とおくとき，2倍角の公式を利用して $\sin\theta$, $\cos\theta$ を t で表せ．

解答　見やすくするために，

$$\theta=2\alpha$$

とおく．

ついで，倍角の公式を用いると，

$$\sin\theta=\sin 2\alpha$$
$$=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$=2\tan\alpha\cos^2\alpha$$
$$=2\tan\alpha\cdot\frac{1}{1+\tan^2\alpha}$$

$$\sin\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\therefore\quad \sin\theta=\boldsymbol{\frac{2t}{1+t^2}}$$

となる．

同様にして，

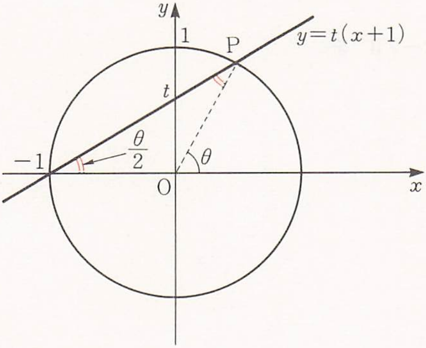
$$\cos\theta=\cos 2\alpha$$
$$=2\cos^2\alpha-1$$
$$=\frac{2}{1+t^2}-1$$

$$\cos\theta=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

を得る．

［注］　上の結果によれば，たとえば，$\sin^2\theta+5\cos\theta$ や $\dfrac{3\sin\theta}{2+\cos\theta}$ などのような $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の有理式（整式または分数式）は $t=\tan\dfrac{\theta}{2}$ の有理式で表されることになる．



これは，xy 平面上，左図のように円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=t(x+1)$ の交点Pの座標を t の式で表すことに相当している．

なお，ここで得た結果は，「数学III」積分法において大切な役割を果たす．

B.217

(1)　三角関数の加法定理,倍角の公式を利用し，3倍角の公式 $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$，$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ を導け.

(2)　$\alpha=18^\circ$ とすると，$3\alpha=90^\circ-2\alpha$ となることを利用して $\sin 18^\circ=t$ とおいたときに，t が方程式

$$4t^3-2t^2-3t+1=0$$

を満たすことを示せ.

(3)　$\sin 18^\circ$ を求めよ.

アプローチ　三角関数にまつわる公式の数はおびただしいのですが，導き方をマスターしていれば思い出すのは容易です.

解答　(1)　$3\theta=2\theta+\theta$ として

$$\begin{aligned}\sin 3\theta&=\sin(2\theta+\theta)=\sin 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta\sin\theta\\&=(2\sin\theta\cos\theta)\cos\theta+(1-2\sin^2\theta)\sin\theta\\&=2\sin\theta(1-\sin^2\theta)+(1-2\sin^2\theta)\sin\theta\\&=\mathbf{3\sin\theta-4\sin^3\theta}\end{aligned}$$

◀ 加法定理
◀ 倍角公式を利用
◀ $\sin\theta$ だけの式に直した.

$$\begin{aligned}\cos 3\theta&=\cos(2\theta+\theta)=\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta\\&=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-(2\sin\theta\cos\theta)\sin\theta\\&=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2\cos\theta(1-\cos^2\theta)\\&=\mathbf{4\cos^3\theta-3\cos\theta}\end{aligned}$$

◀ 加法定理
◀ 倍角公式を利用
◀ $\cos\theta$ だけの式に直した.

(2)　$\alpha=18^\circ$ とおくと，$5\alpha=90^\circ$　………①

これは，

$3\alpha=90^\circ-2\alpha$

と変形できる．これから

$\sin 3\alpha=\sin(90^\circ-2\alpha)$　………②

$\therefore$　$\sin 3\alpha=\cos 2\alpha$

◀ $\cos 3\alpha=\sin 2\alpha$ を利用しても解ける．各自試みよ.

ここで，3倍角，倍角の公式を利用すると，

$3\sin\alpha-4\sin^3\alpha=1-2\sin^2\alpha$　………③

よって，$\sin\alpha=t$ とおけば　t は方程式

$4t^3-2t^2-3t+1=0$　………④

を満たす. ∎

因数定理 ▶ (3)　3次方程式④を解くことにより $\sin 18^\circ$ を求める．ところで

☞大学への数学Aニューアプローチ，A1.10II

$$f(t)=4t^3-2t^2-3t+1$$

とおけば，$f(1)=0$ であるから，3次式 $f(t)$ は1次式 $(t-1)$ で割りきれる．

$$\begin{array}{r} 4t^2+2t-1 \\ t-1\,\big)\,\overline{4t^3-2t^2-3t+1} \\ \underline{4t^3-4t^2} \\ 2t^2-3t \\ \underline{2t^2-2t} \\ -t+1 \\ \underline{-t+1} \\ 0 \end{array}$$

したがって，$f(t)$ は，次のように因数分解できる．

$$f(t)=(t-1)(4t^2+2t-1)$$

このことから，方程式④ $f(t)=0$ の解は，

$$t=1,\ \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4} \qquad \cdots\cdots⑤$$

ところが，$t=\sin 18^\circ$ は

$$0<t<1 \qquad \cdots\cdots⑥$$

sin18° の値が比較的簡単なことに注目！ ▶ の範囲にあることは確かだから，⑤，⑥より

$$t=\sin 18^\circ=\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}$$

[注]　1°　3次方程式④を解くときに，左辺を因数分解したが，ここで，数学Aで学んだ因数定理を利用している．

2°　⑤のように $t=\sin 18^\circ$ の値として不適な値

$$t=1,\ \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

が現れたのは，①に対し，②が単なる必要条件に過ぎないためである．実際，②は

$$\alpha=90^\circ \text{ や } \alpha=162^\circ$$

でも成り立つ．

B. 218

2 直線 $y=m_1x+n_1$，$y=m_2x+n_2$

$(m_1 \neq m_2,\ 1+m_1m_2 \neq 0)$

のなす角のうち鋭角の方を θ とすると，

$$\tan\theta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$$

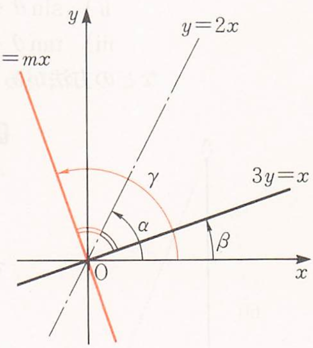
である．これを利用して，直線 $y=2x$ に関し直線 $3y=x$ と対称な直線の方程式を求めよ．

アプローチ tan の加法定理の最も重要な応用例の 1 つです．

解答　$y=2x$ ………①

$3y=x$ ………②

および求める直線と x 軸となす角を図のようにそれぞれ α，β，γ とする． また，2 直線①，②の傾きはそれぞれ，2，$\frac{1}{3}$ であるから，2 直線のなす鋭角を $\theta=\alpha-\beta$ とすれば，公式により



$$\tan\theta=\frac{2-\frac{1}{3}}{1+2\cdot\frac{1}{3}}=1$$

である．

ここで，求める直線の傾きを m とすると，

$\gamma=\theta+\alpha$，$\tan\alpha=2$

であることから

$$m=\tan\gamma=\tan(\theta+\alpha)=\frac{1+2}{1-1\cdot2}=-3$$

◀ tan の加法定理

を得る．

$\boldsymbol{y=-3x}$

参考　上の場合，たまたま，$\tan\theta=1$ であるから，$\theta=45^\circ$ である．したがって求める直線は，直線②と直交することになるので，

$$\frac{1}{3}\cdot m=-1$$

から，$m=-3$ を導くこともできる．

B.219

1辺100mの正方形の広場の1つの角Oに直立する高さが60mの棒OAがあり，地上10mのところBから上だけ赤く塗ってある．いま広場の1点Pから棒の赤い部分を見込む角をθとするとき，$\theta \geqq 45°$であるような広場の部分の面積を求めよ．

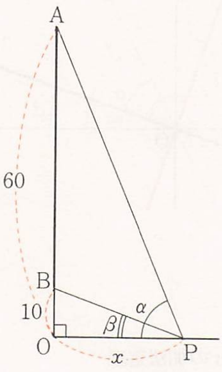
アプローチ　見込む角θの大きさは，見上げる地点から棒までの距離だけで決まることを見抜き，θとこの距離の関係を式で表現しようと考えます．ところで，角と距離(長さ)の関係を定式化するには，

i)　$\cos\theta$を考える(余弦定理またはベクトルの内積)

ii)　$\sin\theta$を考える(正弦定理，三角形の面積)

iii)　$\tan\theta$を考える($\tan$の加法定理)　B.218

などの方法がありますが，本問ではどの方針が有利でしょうか．



解答　棒からPまでの距離をxとし，また$\angle$APO，$\angle$BPOの大きさをそれぞれα，βとおくと

$$\tan\alpha=\frac{60}{x},\ \tan\beta=\frac{10}{x}$$

であるから，$\tan\theta$は，

$$\begin{aligned}\tan\theta&=\tan(\alpha-\beta)\\&=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\\&=\frac{60/x-10/x}{1+(60/x)\cdot(10/x)}\\&=\frac{50x}{x^2+600}\end{aligned}$$

と表せる．

$\theta \geqq 45°$となるのは$\tan\theta \geqq 1$となるときであるから，

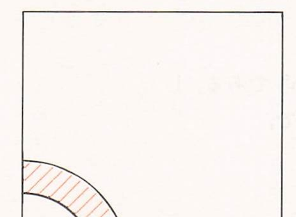
$$\frac{50x}{x^2+600} \geqq 1$$

$$(x-20)(x-30) \leqq 0 \qquad \therefore \quad 20 \leqq x \leqq 30$$

したがって，$\theta \geqq 45°$となるPの存在範囲は，左図のような，広場のOを中心とする2つの同心円(4分円)ではさまれた部分であり，その面積は

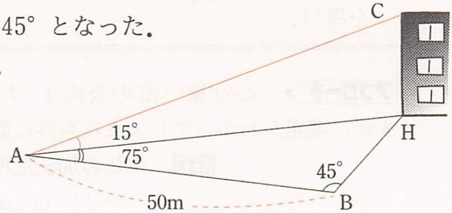
$$\frac{\pi(30^2-20^2)}{4}=\boldsymbol{125\pi}\ (\mathbf{m^2})$$

となる．



B.220

校庭のA地点から，校舎の屋上のC地点を見上げたところその角は15° であった．また，A 地点から 50 m 離れたところにB地点をとり角度を測ったところ，図のように
$\angle HAB=75°$，$\angle HBA=45°$ となった．
校舎の高さ CH を求めよ．
ただし，$\sqrt{6}=2.449$
$\sqrt{2}=1.414$ とする．



アプローチ $\angle AHB=180°-(75°+45°)=60°$

$\triangle ABH$ において，正弦定理より，

$$\frac{AH}{\sin 45°}=\frac{50}{\sin 60°}$$

$$AH=\frac{50}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{50\sqrt{6}}{3}$$

また　$\tan 15°=\tan(45°-30°)$

$$=\frac{\tan 45°-\tan 30°}{1+\tan 45°\cdot\tan 30°}$$

◁ tanの加法定理

$$=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$$

$\tan 15°=\dfrac{CH}{AH}$ であるから

$$CH=(2-\sqrt{3})\cdot\frac{50\sqrt{6}}{3}$$

$$=\frac{100\sqrt{6}-150\sqrt{2}}{3}=\frac{244.9-212.1}{3}$$

$$\fallingdotseq 10.93$$

よって，

校舎の高さは，**約 11 m.**

◁ 有効数字が明確でないので 10.9 m などと答えてもよい．

B.221

正弦・余弦の加法定理を利用して，“積を和になおす公式”

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

を導け．

アプローチ この‘積→和’の公式は，ただ暗記しようとすると大変ですが，理屈がわかってしまえば意外に簡単です．

解答 余弦の加法定理

$$\begin{cases}\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\cos\beta\end{cases}$$

の2式の差をとると，

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$$

となり，これより

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

が得られる．■

B.222

正弦，余弦の加法定理を用い，“和を積にかえる公式”

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

を導け．

アプローチ ‘積→和’公式を導くときに最も大切なポイントは，与えられたA，Bを，$A=\alpha+\beta$，$B=\alpha-\beta$ と表す2数 α，β を見つけることです．

解答 $A=\alpha+\beta$，$B=\alpha-\beta$ とおくと

$$\frac{A+B}{2}=\alpha,\quad \frac{A-B}{2}=\beta$$

したがって

$$\begin{cases}\sin A=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \sin B=\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{cases}$$

となり，この2式を差し引いて

$$\begin{aligned}\sin A-\sin B&=2\cos\alpha\sin\beta\\&=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\end{aligned}$$ ■

B. 223

$P=\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ=\dfrac{1}{8}$ であることを示せ．

アプローチ $\cos 20^\circ$，$\cos 40^\circ$，$\cos 80^\circ$ などは，その真の値を簡単に知ることはできません．しかし，それらの積の値は知ることができるという不思議な問題です．一種のパズルと思ってたのしんで下さい．

解答

$$\begin{aligned}P&=\cos 20^\circ(\cos 40^\circ \cos 80^\circ)\\&=\cos 20^\circ\cdot\frac{1}{2}(\cos 40^\circ+\cos 120^\circ)\\&=\frac{1}{2}\cos 20^\circ\cos 40^\circ-\frac{1}{4}\cos 20^\circ\\&=\frac{1}{4}(\cos 20^\circ+\cos 60^\circ)-\frac{1}{4}\cos 20^\circ\\&=\frac{1}{4}\cos 60^\circ=\mathbf{\frac{1}{8}}\end{aligned}$$ ■

◀ $40^\circ+80^\circ=120^\circ$
◀「積→和」
◀ $\cos 120^\circ=-\dfrac{1}{2}$
◀ 再び「積→和」

B. 224

△ABC において，次の等式を証明せよ．

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

解答 $A=180^\circ-(B+C)$ より $\sin A=\sin(B+C)$ ……①

◀ $A+B+C=180^\circ$ を用いれば，A，B，C のうちどれか1つが消せる．

また，$\sin B+\sin C=2\sin\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}$ …②

これに合わせて，①の右辺をさらに，

$$\sin(B+C)=2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B+C}{2} \quad\cdots\cdots ③$$

◀ 倍角の公式

と書き直すことによって，

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=2\sin\frac{B+C}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)\\&=4\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \quad\cdots\cdots ④\end{aligned}$$

◀ $\cos\dfrac{B\pm C}{2}=\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}\mp\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$
または「和→積」の公式

一方，$\dfrac{B+C}{2}=90^\circ-\dfrac{A}{2}$

より $\sin\dfrac{B+C}{2}=\cos\dfrac{A}{2}$ ……⑤

④，⑤より，左辺＝右辺 が示せた．■

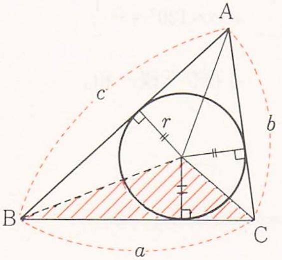
B.225

△ABC の外接円の半径を R，内接円の半径を r とすると，

$$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

であることを示せ．

アプローチ 三角形の 3 辺と外接円の半径の関係は正弦定理で与えられます．内接円の半径については，三角形の面積を媒介として 3 辺の長さに関係させるのが有名な技法です．



解答 △ABC の面積を S とし，辺 BC, CA, AB の長さを a，b，c とおくと，

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

である．

他方，内接円の中心を 3 頂点を結んで三角形を 3 個の小三角形に分割して計算すれば，

$$S=\frac{1}{2}r(a+b+c) \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

でもある．

①，②より，

$$r=\frac{bc\sin A}{a+b+c} \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

一方，正弦定理より，$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$ であるから，

「和→積」の公式▶

途中の変形は，B.224 を見よ．▶

倍角の公式▶

$$\begin{cases} a+b+c=2R(\sin A+\sin B+\sin C) \\ \qquad =8R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \quad \cdots\cdots\cdots ④ \\ bc\sin A=4R^2\sin A\sin B\sin C \\ \qquad =32R^2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} \\ \qquad \cdots\cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

となるので，④，⑤を③へ代入すると

$$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

を得る．∎

B. 226

四角形 ABCD で

$$\sin A+\sin B=\sin C+\sin D \quad \cdots\cdots\cdots \quad (*)$$

が成り立つとき，この四角形はどんな四角形か．

アプローチ $A+B+C+D=360^\circ$ をどう使うか．

解答 $\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$　◀「和→積」の公式

$\sin C+\sin D=2\sin\dfrac{C+D}{2}\cos\dfrac{C-D}{2}$　◀「和→積」の公式

$=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{C-D}{2}$　◀ $\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$

であるから，(＊)は

$$\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{C-D}{2}\right)=0$$

と同値である．さらにこの左辺の第2因子の符号を変えたものは，

$2\sin\dfrac{(A-B)+(C-D)}{4}\sin\dfrac{(A-B)-(C-D)}{4}$　◀「和→積」の公式

$=2\sin\dfrac{(A+C)-(B+D)}{4}\sin\dfrac{(A+D)-(B+C)}{4}$

$=2\sin\left(\dfrac{A+C}{2}-90^\circ\right)\sin\left(\dfrac{A+D}{2}-90^\circ\right)$　◀ $A+B+C+D=360^\circ$

$=2\cos\dfrac{A+C}{2}\cos\dfrac{A+D}{2}$

と変形できるので，結局(＊)は

i) $\sin\dfrac{A+B}{2}=0$　または　ii) $\cos\dfrac{A+C}{2}=0$

または　iii) $\cos\dfrac{A+D}{2}=0$

四角形の任意の2角の和は0°より大，360°より小であるから，i) は不可能であり，ii)，iii) が成立するのはそれぞれ

ii) $A+C=180^\circ$　iii) $A+D=180^\circ$

のときである．

ii) は，四角形 ABCD が円に内接するとき

iii) は，四角形 ABCD が AB∥DC のとき

である．よって，四角形は

円に内接する四角形，または，台形(AB∥DC)．

B.227

△ABC において，

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1 \quad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$

が成立するのは，三角形がどんな形のときか．

アプローチ 余弦定理を用いて，①を辺 a，b，c のみの式に書き直しても解けるはずですが，かなり複雑な式になりそうですね．

ここでは，倍角公式と，$A+B+C=180°$ を用いて，式を変形しましょう．

解答 倍角の公式より，

「$\cos^2$，$\sin^2$ を見たら倍角」は定石である．

$$\cos^2 A=\frac{\cos 2A+1}{2},\ \cos^2 B=\frac{\cos 2B+1}{2}$$

であり，また，

$$C=180°-(A+B)$$

であるから，

$\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$

$$\cos^2 C=\cos^2(A+B)$$

となり，これらを①に代入すると

$$\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)+\cos^2(A+B)=0$$

となる．

左辺の和を積の形に直すと，

{ } の中を加法定理で展開．または「和 → 積」の公式

$$\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos^2(A+B)=0$$

$$\therefore\ \cos(A+B)\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\}=0$$

$$\therefore\ \cos(A+B)\cos A\cos B=0$$

すなわち

$$\cos A\cos B\cos C=0$$

となる．よって，これから

$$\therefore\ A=90° \text{ または } B=90° \text{ または } C=90°$$

となるので，三角形は

直角三角形

である．

B.228

三角形ABCにおいて，∠A＝60°であるとする.

(1)　$\sin B+\sin C$ のとりうる値の範囲を求めよ.

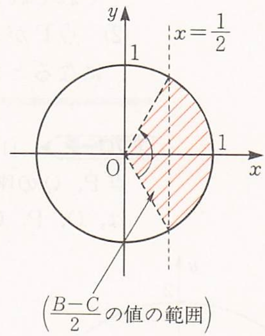
(2)　$\sin B\sin C$ のとりうる値の範囲を求めよ.

アプローチ　〈和 ⟷ 積〉の公式が活躍するところです.

解答　(1)　$A=60°$ より，$B+C=120°$ であるので

$$\sin B+\sin C=2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$=\sqrt{3}\cos\frac{B-C}{2}$$



$-60°<\dfrac{B-C}{2}<60°$ であるので，$\dfrac{1}{2}<\cos\dfrac{B-C}{2}\leqq 1$

よって，$\sin B+\sin C$ のとりうる値の範囲は，

$$\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin B+\sin C\leqq\sqrt{3}}$$

である.

(2)　$\sin B\sin C=-\dfrac{1}{2}\{\cos(B+C)-\cos(B-C)\}$

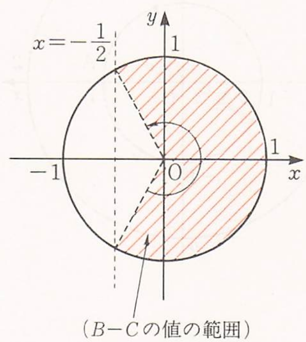
$$=\frac{1}{2}\cos(B-C)+\frac{1}{4}$$

$-120°<B-C<120°$ より，$-\dfrac{1}{2}<\cos(B-C)\leqq 1$.

したがって，$\sin B\sin C$ のとりうる値の範囲は，

$$\boldsymbol{0<\sin B\sin C\leqq\frac{3}{4}}$$

となる.



[注]　このように解くほか，$B+C=120°$ という関係を用いて C を消去し，

(1)　$\sin B+\sin(120°-B)=\cdots$

$$=\frac{3}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B$$　[この後は，いわゆる合成]

(2)　$\sin B\sin(120°-B)=\cdots$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\cos B+\frac{1}{2}\sin^2 B$$　[この後は倍角公式で次数を下げて，合成]

のとりうる値の範囲を求める，という方針の解法もある.

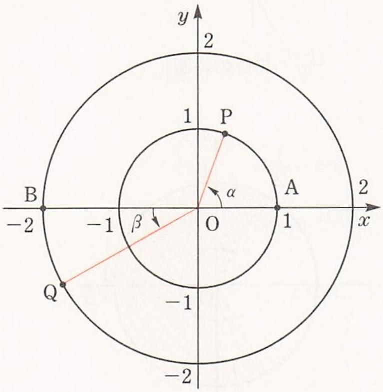
B.229

座標平面上に原点Oを中心とする半径1の円 C_1 と半径2の円 C_2 がある．2点P，Qがそれぞれ点A(1, 0)，B(−2, 0)を同時に出発して同じ速度で C_1，C_2 上を正の向きに動くとする．

(1)　動径OP，OQがある時刻までに回転した角の大きさをそれぞれ α，β とするとき，α と β の関係を求めよ．

(2)　点Pが C_1 上を一周する間に，△OPQが二等辺三角形になるときのP，Qの座標を求めよ．

アプローチ　(1)　弧の長さは，半径と中心角に比例します．(2)では，点P，Qの座標を三角関数で表示します．また，PQ=1 となるのは，O，P，Qが一直線上に並ぶときであることに注意しましょう．



解答　(1)　$\overset{\frown}{AP}=\overset{\frown}{BQ}$ であるから，中心角は半径の長さに反比例するので，$\boldsymbol{\alpha=2\beta}$．

(2)　OP=1，OQ=2 であるから，△OPQが二等辺三角形となるのは、PQ=2 のとき．

点P，Qの座標は，$P(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，

$Q(2\cos(180^\circ+\beta),\ 2\sin(180^\circ+\beta))$ であるから，

$$PQ^2=(\cos\alpha+2\cos\beta)^2+(\sin\alpha+2\sin\beta)^2$$
$$=5+4(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$$
$$=5+4\cos(\alpha-\beta)$$

$\alpha=2\beta$，$PQ^2=4$ であるから

$$PQ^2=5+4\cos\beta=4$$

$$\cos\beta=-\frac{1}{4}\quad\therefore\quad -2\cos\beta=\frac{1}{2}$$

$0^\circ\leqq\alpha\leqq360^\circ$ より $0\leqq\beta\leqq180^\circ$ であり，

$$\sin\beta=\frac{\sqrt{15}}{4}\quad\therefore\quad -2\sin\beta=-\frac{\sqrt{15}}{2}$$

倍角の公式 ▶ $\sin\alpha=\sin2\beta=2\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{\sqrt{15}}{8}$

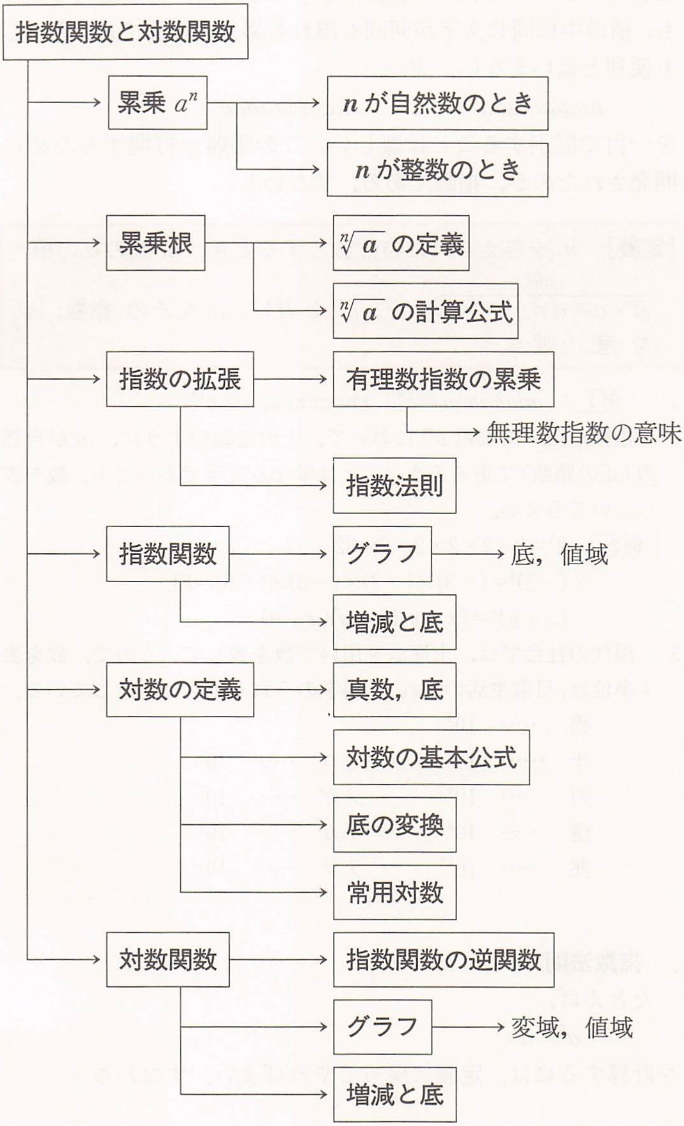
$$\cos\alpha=\cos2\beta=\frac{1}{16}-\frac{15}{16}=-\frac{7}{8}$$

よって，$P\left(-\frac{7}{8},\ -\frac{\sqrt{15}}{8}\right)$，$Q\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$

を得る．

§3 指数関数・対数関数

□ キー・ワード　（A基礎理論篇）



A3.1 累乗と指数法則

I．累乗と指数

「積を表す記号‘×’は省いて，たとえば

$$a\times b\times c \quad \text{は} \quad abc$$

と書く」という文字式の規約は中学で学んだ．この便利な記号も，積の中に同じ文字が何回も現れる累乗の場面では，必ずしも便利とはいえない．実際

$$aaaaaaaaa \quad \text{と} \quad aaaaaaaaaa$$

を一目で区別することは難しい．この困難を打開するために開発されたのが，指数である．すなわち

［定義］ m を与えられた自然数とするとき，m 個の a の積 $\overbrace{a\times a\times a\times\cdots\cdots\times a}^{m\text{個}}$ を，a^m と表し，m をその **指数**，a を **底** と呼ぶ．

1° 例1　$aaaaaaaa=a^8$，$xxxxxxxxxx=x^{10}$

2° 指数を用いた表現 a^m において，上の定義のように，m が自然数（正の整数）であるときは，a は単なる文字であっても，数を表していてもよい．

例2　$2^5=2\times2\times2\times2\times2=32$

$(-3)^4=(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)=81$

$(x+y)^3=(x+y)(x+y)(x+y)$

3° 現代の社会では，十進法を用いて数を表しているので，数を表す単位は，日常生活のそれも，科学のそれも 10^m に対応している．

百 …… 10^2			
千 …… 10^3		キロ …… 10^3	
万 …… 10^4		メガ …… 10^6	
億 …… 10^8		ギガ …… 10^9	
兆 …… 10^{12}		テラ …… 10^{12}	

II．指数法則

たとえば，

$$a^5\times a^7$$

を計算するには，定義に戻ってやればよい．すなわち

$$(\underbrace{a\times a\times a\times a\times a}_{5\text{個}})\times(\underbrace{a\times a\times a\times a\times a\times a\times a}_{7\text{個}})$$
$$=\underbrace{a\times a\times a\times a\times a\times a\times a\times a\times a\times a\times a\times a}_{12\text{個}}$$

であるから，

$$a^5\times a^7=a^{12}$$

となる．ところでこの計算を反省してみると，実際にやっているのは，

$$5+7=12$$

という計算に過ぎないことがわかる．これを一般化して，次の指数法則が導かれる．

指数法則

［定理］　m，n を自然数とするとき
(1)　$a^m\times a^n=a^{m+n}$
(2)　$(a^m)^n=a^{mn}$

1°　(2)は(1)の特別の場合の応用にすぎないともいえる．実際，(1)を使うだけで，たとえば

$(a^3)^2$ を $a^3\times a^3=a^{3+3}=a^6$

と計算できる．しかし，(2)を利用すれば，

$(a^3)^2=a^{3\times 2}=a^6$

のように，もっと簡単である．

積の交換可能性 $ab=ba$ を利用すれば，次の指数法則も得られる．

指数法則

［定理］　n を自然数とするとき
(3)　$(ab)^n=a^nb^n$

1°　例1　$(ab)^3=(ab)(ab)(ab)$
$=(aaa)(bbb)=a^3b^3$

2°　上の公式(1)，(2)，(3)は組み合わせて用いることが多い．

例2　$(2a^2b^3)^4=2^4(a^2)^4(b^3)^4$　………(3)より
$=16a^8b^{12}$　………(2)より

割り算は，掛け算の逆演算であるから，指数法則の割り算版を作ることができる．たとえば

$$a^8 \div a^5$$

は，

$$(\underbrace{a\times a\times a\times a\times a\times a\times a\times a}_{8\text{個}})\div(\underbrace{a\times a\times a\times a\times a}_{5\text{個}})=a\times a\times a$$

より，

$$a^8 \div a^5 = a^3$$

と計算できる．これを一般化すれば

［定理］ m，n を自然数とするとき **指数法則**

$$(1') \quad a^m \div a^n = \begin{cases} a^{m-n} & m>n \text{ のとき} \\ 1 & m=n \text{ のとき} \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & m<n \text{ のとき} \end{cases}$$

1° 例3 $a^{12} \div a^8 = a^4$

$$a^8 \div a^{12} = \frac{1}{a^4}$$

2° この法則において，a が数を表すと考えるときには，a を $a \neq 0$ と限定する必要がある．

III. 0 や負の整数の指数

以上の指数法則(1)，(2)，(3)，(1′) の中で，(1′) だけが他のものと比べ，ひどく煩雑である．この煩雑さは，指数表現 a^m を，m が 0 以下の整数にまで拡張すると解消できる．

［定義］ **0 乗の定義**

$$a^0 = 1$$

［定義］ $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ （ただし，n は，正の整数） **負の指数の定義**

1° 例1 $a^{-3} = \dfrac{1}{a^3}$，$a^{-1} = \dfrac{1}{a}$

2°　a^m（m は 0 以下の整数）において，a が数を表すと考えるときには，a に，$a \neq 0$ という限定をつける．ただし，0^0 は 1 と考えることが多い．

3°　これらの定義の下で，前ページの[定理]（指数法則 (1′) は，次のように単純化される．

> **[定理]**　m，n を自然数とするとき
>
> (1′)　$a^m \div a^n = a^{m-n}$

さらに，上の指数法則につけられていた“m，n：自然数”という制限を“m，n：整数”と緩めることができる．

例 2　$a^5 \times a^{-7} = a^{-2}$

$a^3 \div a^{-5} = a^8$

$(a^{-2})^{-3} = a^6$

$(a^{-1}b)^{-1} = ab^{-1}$

4°　数学Aで学んだ等差数列と等比数列を考えれば，本節の初めに与えた定義は，ごく自然である．すなわち

（各項の間に +1）

等差数列：　1,　2,　3,　4,　5,　…………

等比数列：　a,　a^2,　a^3,　a^4,　a^5,　…………

（各項の間に $\times a$）

を初項より前に（左方に）延長するとすれば

（各項の間に -1）

等差数列：　-2,　-1,　0,　1,

等比数列：　$\dfrac{1}{a^2}$　$\dfrac{1}{a}$　1　a

（各項の間に $\div a$）

5°　さらに，等差数列 $\{\cdots\cdots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots\}$ の項の間に適当な項を補なって全体を等差数列にすることができる．たとえば

$$\left\{\cdots\cdots,\ -2,\ -\frac{3}{2},\ -1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \cdots\cdots\right\}$$

である．この等差数列の補間に対応して，等比数列

$$\left\{\cdots\cdots,\ \frac{1}{a^2},\ \frac{1}{a},\ 1,\ a,\ a^2,\ \cdots\cdots\right\}$$

の補間ができるように，$a^{\frac{1}{2}}$ や $a^{-\frac{1}{2}}$ などを定義できないだろうか？それに答えるのが次節である．

A3.2 累乗根

I．累乗根の定義

a を与えられた数とするとき，2 乗して a となる数が a の平方根（2 乗根）であった．たとえば，9 の平方根は 3，-3 の 2 数であり，10 の平方根は $\sqrt{10}$，$-\sqrt{10}$ の 2 数である．

n を任意の自然数とするとき，与えられた数 a の n 乗根は次のように定義される．

n 乗根

> **［定義］** n を正の整数とするとき，n 乗して a となる数を a の n 乗根という．

1°　2 乗根のことを平方根，3 乗根のことを立方根ともよぶ．いろいろな n についての乗根をまとめて **累乗根** という．

2°　例 1　16 の 4 乗根を求めるには，

$$x^4=16$$
$$\therefore \quad x^4-16=0$$

となる x を求めればよい．

$$x^4-16=(x^2-4)(x^2+4)$$
$$=(x-2)(x+2)(x^2+4)$$

より，16 の 4 乗根は，2，-2 の 2 数である．

注意　これは，あくまで実数の世界の話である．数学Bで学ぶ複素数の範囲まで拡げれば，16 の 4 乗根は，2，-2，$2i$，$-2i$ の 4 つである．

3°　例 2　-27 の 3 乗根を求めるには，

$$x^3=-27$$
$$\therefore \quad x^3+27=0$$

となる x を求めればよい．

$$x^3+27=(x+3)(x^2-3x+9)$$

より，-27 の 3 乗根は -3 ひとつである．

注意　複素数の範囲には，さらに2つの根 $\dfrac{3(1\pm\sqrt{3}\,i)}{2}$ がある．

4°　上の例1，例2が暗示するように，$a \neq 0$ ならば，a の n 乗根は複素数の範囲では n 個存在するが，数学IIで問題とするのは実数の範囲にあるものだけである．

II.　実数の範囲での *n* 乗根

実数 a の n 乗根の個数は，実数の範囲では n が偶数であるか，奇数であるかで決まる．

[定義]　[I]　*n* が偶数のとき；

(1)　$a>0$ ならば，a の n 乗根は2つあり，符号が異なる．この正の方を $\sqrt[n]{a}$ で表す．したがって，他方は $-\sqrt[n]{a}$ である．

(2)　$a<0$ ならば，a の n 乗根は実数の範囲に存在しない．

[II]　*n* が奇数のとき；

a の符号に関係なく，a の実数の n 乗根はただ1つあり，a と同じ符号をもつ．それを $\sqrt[n]{a}$ で表す．

実数の *n* 乗根の個数と $\sqrt[n]{a}$ の定義

1°　$a=0$ のとき，0の n 乗根は，n の偶奇に依らず0だけである．すなわち

$$\sqrt[n]{0}=0$$

2°　例　$\sqrt[4]{16}=2,\qquad \sqrt[4]{9}=\sqrt{3}$

$\sqrt[3]{27}=3,\qquad \sqrt[3]{-27}=-3$

$\sqrt[3]{1000}=10,\quad \sqrt[3]{-1000}=-10$

3°　**正数の *n* 乗根**

a を正数とすれば，n が偶数であっても奇数であっても，次の関係が成り立つ．

$$x=\sqrt[n]{a} \iff x^n=a \text{ かつ } x>0$$
$$\iff x \text{ は } a \text{ の正の } n \text{ 乗根}$$

III.　正の *n* 乗根の性質

一般の記号 $\sqrt[n]{}$ を含む式の計算について，次の等式が成り立つ．ただし，a，b は正数で，m，n は正の整数である．

> ［公式］　(1)　$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$
>
> $$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$
>
> (2)　$\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$
>
> (3)　$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

n 乗根の計算公式

1°　(1)の前半を証明するのには，左辺を x とおき，これが右辺，すなわち ab の正の n 乗根であることを示す．すなわち

$$x=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} \quad \cdots\cdots①$$

ならば

$$x^n=ab \text{ かつ } x>0 \quad \cdots\cdots②$$

であることを示せばよい．まず，a，b が正のとき

$\sqrt[n]{a}>0$，$\sqrt[n]{b}>0$ であるから $x>0$．

一方①により

$$x^n=(\sqrt[n]{a})^n\times(\sqrt[n]{b})^n=a\times b=ab$$

これで②が示せた．

(2)，(3)についても同様である．

2°　公式(1)を利用して，$\sqrt[n]{}$ の中に a^n の形の因数が見つかれば a を外にくくり出すことができる．ただし $a>0$ とする．

すなわち，a，b が正数のとき

$$\sqrt[n]{a^nb}=a\sqrt[n]{b}$$

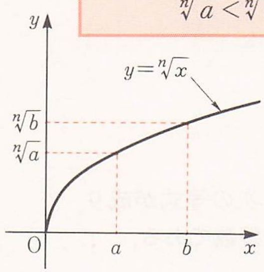
因数のくくり出し

IV.　n 乗根の大小

正数 a を大きくすると $\sqrt[n]{a}$ の値も大きくなる．すなわち

> ［定理］　$0<a<b$ ならば，任意の自然数 n に対して
>
> $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$

n 乗根の大小



1°　とくに，n を自然数とするとき

$$a>1 \Longrightarrow \sqrt[n]{a}>1$$
$$0<a<1 \Longrightarrow \sqrt[n]{a}<1$$

2°　上の定理は，関数 $y=\sqrt[n]{x}$ が $x>0$ の範囲で増加関数であることを意味している．

A 3.3　指数の拡張

この節では，以下，a を正の定数に限定して話を進める．

I．［定義］ 指数が有理数の累乗

m，n を自然数とするとき，$a^{\frac{m}{n}}$ は

$$a^{\frac{m}{n}}=(\sqrt[n]{a})^m \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

または

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m} \qquad \cdots\cdots\cdots ①'$$

により定義される．また，$a^{-\frac{m}{n}}$ は

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{(\sqrt[n]{a})^m}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

により定義される．

1°　①，①′ の右辺は等しいので，どちらを定義に使っても差しつかえない．

2°　①，②により a の累乗（一般累乗）a^x における指数 x が正負の有理数の場合が定義されたことになる．

すでに，$x=0$ に対して $a^x=a^0$ は 1 と定義されているので，以上で

$$a^x \quad (x\in \mathbb{Q})$$

の定義が完了したことになる．$\mathbb{Q}$ は，有理数全体の集合である．

3°　たとえば，$\dfrac{10}{15}=\dfrac{2}{3}$ であるから，$a^{\frac{10}{15}}$ と $a^{\frac{2}{3}}$ とは，等しいことが期待される（もし，そうなっていないとすると，有理数の指数を用いる指数法則の応用ができないことになる）．これは実際そうなっている．一般に m，n，p を自然数とするとき，

$$a^{\frac{mp}{np}}=a^{\frac{m}{n}}, \qquad a^{-\frac{mp}{np}}=a^{-\frac{m}{n}}$$

が証明されるからである．

ガイド☆　☞C.8

4°　①，②の定義によれば，任意の有理数 x に対して $a^x>0$ である．（もちろん a を正数と仮定している．）

5°　等差数列 $\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$ に 4 つの項を補なって等差数列を保つには $\left\{-2,\ -\dfrac{3}{2},\ -1,\ -\dfrac{1}{2},\ 0,\ \dfrac{1}{2},\ 1,\ \dfrac{3}{2},\ 2\right\}$

とするほかない．同様に等比数列 $\left\{\frac{1}{a^2},\ \frac{1}{a},\ 1,\ a,\ a^2\right\}$ に4つの項を補なって等比数列を保つには

$$\left\{\frac{1}{a^2},\ \frac{1}{a\sqrt{a}},\ \frac{1}{a},\ \frac{1}{\sqrt{a}},\ 1,\ \sqrt{a},\ a,\ a\sqrt{a},\ a^2\right\}$$

とするしかない．上のように指数を拡張しておくと，ここで補なわれた4つの項どうしの対応も含めて，2つの数列の各項が対応する．

a^{-2}	$a^{-\frac{3}{2}}$	a^{-1}	$a^{-\frac{1}{2}}$	a^0	$a^{\frac{1}{2}}$	a^1	$a^{\frac{3}{2}}$	a^2
‖	‖	‖	‖	‖	‖	‖	‖	‖
$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a\sqrt{a}}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{\sqrt{a}}$	1	$\sqrt{a}$	a	$a\sqrt{a}$	a^2

II．　指数法則

x，y を任意の有理数として次の指数法則が成り立つ．

指数法則

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$
$$(a^x)^y = a^{xy} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

1°　いいかえれば，この指数法則が成り立つように，$a^x (x \in \mathbb{Q})$ の定義を行ったのである．

2°　有理数の範囲での指数法則の証明は理論的に重要であるが，教科書では正面から取り組んでいない．余力のある読者は本書C篇について理解してほしい．

ガイド　☞C.9

3°　次の等式も指数法則に含めることがある．

$$a^x \div a^y = a^{x-y} \quad (x,\ y \in \mathbb{Q})$$

これは，基本的な指数法則①と

$$\frac{1}{a^y} = a^{-y}$$

とから従う．

4°　さらに，a, b を正数として成り立つ次の等式も指数法則に含めることがある．

$$(ab)^x = a^x \cdot b^x \quad (x \in \mathbb{Q}) \quad \cdots\cdots\cdots ③$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \quad (x \in \mathbb{Q}) \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

III.　無理数の指数

正数 a に対しては，指数 x が無理数のときも a^x の意味が定められる．たとえば，$\sqrt{2}=1.4142\cdots\cdots$ だから

$$a^1,\ a^{1.4},\ a^{1.41},\ a^{1.414},\ \cdots\cdots$$

を考えると，これらの値は次第に一定の数に近づいていく．その数を $a^{\sqrt{2}}$ と定めるのである．

このようにして，x が無理数であるときの a^x の値を定義すると **指数法則**

$$a^x\cdot a^y=a^{x+y}$$
$$(a^x)^y=a^{xy}$$
$$a^{-x}=\frac{1}{a^x}$$

が，x，y を任意の実数としてそのまま成り立つ．

A3.4　指数関数

I．定　義

［定義］　a を1でない正の定数とするとき

$$y=a^x$$

で表される関数を，a を底とする **指数関数** という．

指数関数

1°　$a<0$ としても，a^2，a^3 などの意味は明らかであるが，$a^{\frac{m}{n}}$(m，n は自然数)の意味は明確でない．たとえば，$(-4)^{\frac{3}{2}}$ を考えようとして $(-4)^{\frac{3}{2}}=(\sqrt{-4})^3$ とすると，実数でなくなり，一方，$(-4)^{\frac{3}{2}}=(-4)^{\frac{6}{4}}=\sqrt[4]{(-4)^6}$ と考えると8になってしまう．

また，1を底とする“指数関数”は定数関数になってしまう．そこで，ふつう

指数関数の底は，
$$a>0,\ a\neq1$$

指数関数の底

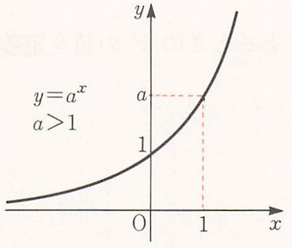
に限るのである．

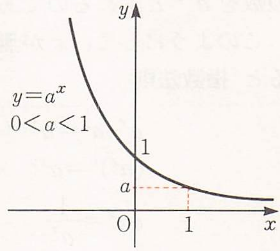
2°　指数関数の定義域は実数全体である．

指数関数 $f(x)=a^x\ (a>0,\ a \neq 1)$ の値域は $\{y \mid y>0\}$，すなわち，正数全体である．さらに，

$a>1$　　ならば，a^x は増加関数であり

$0<a<1$　ならば，a^x は減少関数である．





また，指数関数 $y=a^x$ のグラフは

$a>1$　　ならば，x 軸の負の方で x 軸に漸近し，

$0<a<1$　ならば，x 軸の正の方で x 軸に漸近している．

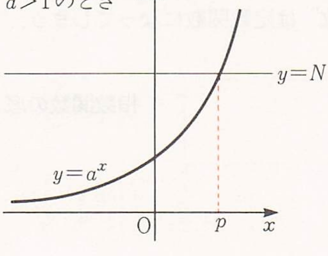
3°　$y=a^x$ のグラフを y 軸に関し対称移動すれば，$y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ のグラフになる．

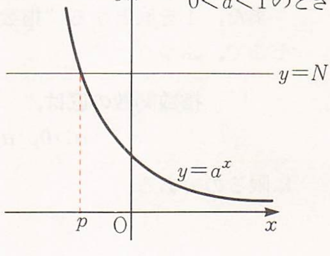
A3.5　対　数

$a>0,\ a \neq 1$ とすると，指数関数 $f(x)=a^x$ の値域は正数全体であり，また a と 1 との大小に応じて，増加関数あるいは減少関数である．したがって，(グラフをながめて) 次のことがわかる．すなわち，任意の正数 N に対して

$$a^p=N$$

となる実数 p がただ 1 つ存在する．





［定義］　上の p を $\log_a N$ で表し，$\boldsymbol{a}$ を底とする N の対数という．すなわち

［定義］　$p=\log_a N \iff a^p=N$　　**対数の定義**
　　　　ただし，$a>0$，$a \neq 1$

1°　例1　$2^3=8$ だから $\log_2 8=3$；$10^{-1}=0.1$ だから $\log_{10} 0.1=-1$
　例2　$a^1=a$ だから $\log_a a=1$，$a^0=1$ だから $\log_a 1=0$
2°　$a^p=N$ から $p=\log_a N$ であるが，これを代入すると

$$a^{\log_a N}=N$$

がつねに成り立つことがわかる．
3°　$\log_a N$ において，N を **真数** という．
対数 $\log_a N$ は $N>0$，$a>0$，$a \neq 1$ のときにのみ意味をもつ．
4°　$\log_{10} N$ のことを N の **常用対数** といい，前後関係から誤解をさけ得るときには底 10 を省いて $\log N$ と書くこともある．
5°　以下本書では，$\log_a$ という記号を書けば，特に断わらなくても，$a>0$，$a \neq 1$ と了解する．

I．対数の公式

［定理］　x，y を任意の正数，m を任意の実数とすると，　　**対数法則**

(1)　$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$　　……… i)

　　$\log_a \dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$　　……… ii)

(2)　$\log_a x^m=m\log_a x$

1°　対数法則は指数法則の別表現である．実際，
証明：$\log_a x=p$，$\log_a y=q$ とおけば，対数の定義から

$$a^p=x, \quad a^q=y$$

よって，指数法則より

$$xy=a^p \cdot a^q=a^{p+q}$$

そこで，対数の定義から，

$$\log_a(xy)=p+q=\log_a x+\log_a y \quad ■$$

ii)についても同様．

また，(2)については指数法則より

$$x^m=(a^p)^m=a^{mp}$$

そこで，対数の定義から

$$\log_a x^m=mp=m\log_a x \quad ■$$

2°　上の公式を具体的な場面で適用するに当たっては，真数 x，y が正であるとの条件に格別の注意をはらう必要がある．

たとえば，

$$\log_a x^2=2\log_a x$$

は，$x>0$ ならば当然成り立つが，$x<0$ では右辺の真数が負となり等式は成立しない．

3°　公式(1)の ii) または(2)の特別の場合として，x を任意の正数とするとき

$$\log_a\frac{1}{x}=-\log_a x$$

II.　底の変換公式

[定理]　任意の正数Nに対して

$$\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}$$

ただし，a，b はいずれも 1 でない正数である．

1°　例　$a=\sqrt{3}$，$b=3$ とすると，$\log_{\sqrt{3}}N=2\log_3 N$

2°　底の異なった対数が入りまじっている問題を解くときには，この公式を用い，底をそろえるのが定石である．☞B.305 など

3°　証明は ☞B.303

4°　上の公式で，$N=b$ とおくと，次の公式が得られる．

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$$

III.　対数の大小と真数の大小

(1)　$\log_a P = \log_a Q \iff P = Q > 0$

(2)　$a > 1$　　ならば，$\log_a P < \log_a Q \iff 0 < P < Q$

$0 < a < 1$ ならば，$\log_a P < \log_a Q \iff 0 < Q < P$

1°　上の事実は，指数関数の増加・減少に関する性質と対数の定義からみちびかれる．

2°　この性質により，数の大小を比べるのに対数を取って比較してもよいことがわかる．なお，等比的に変化する巨大な数や，微小な数の概算や変化の速さは，対数を取って調べた方が扱いやすい．実用面では，数を表現するのに十進法を基にしているので，対数としても，10 を底とする対数（**常用対数**）を利用することが多い．

3°　常用対数の**指標**と**仮数**

x を正数とするとき，x の常用対数 $\log x$ の整数部分を指標，小数部分を仮数という；

$$\text{常用対数} = \text{指標} + \text{仮数} \qquad \cdots\cdots ①$$

ただし，$0 < x < 1$ で $\log x$ が負となるときも考えるには

$$\text{指標} = \log x \text{ を超えない最大の整数} \qquad \cdots\cdots ②$$

と表現する方が正確である．

［例］　$\log 2 = 0.30103\cdots\cdots$ より

$$\log 2000 = \log(2 \times 10^3) = 3 + 0.30103\cdots\cdots$$

したがって，$\log 2000$ の指標は 3，仮数は $0.30103\cdots\cdots$ である．また

$$\log 0.002 = \log \frac{2}{1000} = \log(2 \times 10^{-3})$$
$$= -3 + 0.30103\cdots\cdots$$

したがって $\log 0.002$ の指標は -3 で仮数は $0.30103\cdots\cdots$ である．（$\log 0.002 = -2.6989\cdots\cdots$ であるからといって指標が -2 であるとしては間違い．）

4°　正数 x の常用対数の指標が自然数 n であるとすると

$$n \leqq \log x < n+1$$

を意味する．これは

$$10^n \leqq x < 10^{n+1}$$

と書きなおすことができる．すなわち，真数 x の整数部分は $n+1$ 桁である．

A 3.6　対数関数

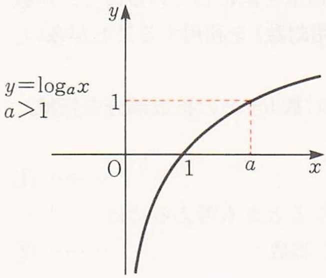
a を 1 でない正の実数とする．このとき

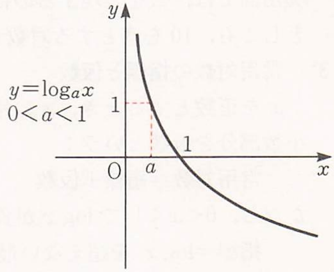
$$y=\log_a x \quad (x>0)$$

で表される関数を，a を底とする **対数関数** という．

1°　"$y=\log_a x \iff x=a^y$" である．この関係を "対数関数 $\log_a x$ と指数関数 a^x とは，たがいに **逆関数** である" という．

したがって，$y=\log_a x$ のグラフは $y=a^x$ のグラフを $y=x$ に関して対称移動したものである．





2°　対数関数 $f(x)=\log_a x$ においては

$$f(1)=\log_a 1=0,\ \text{また，}\ f(a)=\log_a a=1$$

3°　対数関数 $f(x)=\log_a x$ の定義域は正数全体の集合 $\{x \mid x>0\}$ であり，値域は実数全体の集合 $\mathbb{R}$ である．さらに，

$a>1$ ならば　$\log_a x$ は増加関数　であり，

$0<a<1$ ならば　$\log_a x$ は減少関数　である．

また，$y=\log_a x$ のグラフは，x 座標が正の方から 0 に近づくにつれ

$a>1$ ならば　y 軸の負の部分に漸近し，

$0<a<1$ ならば　y 軸の正の部分に漸近する．

——A 3　おわり——



Repos

指数法則と加法定理

指数法則

$$a^{x+y}=a^x\,a^y$$

と加法定理

$$\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{cases}$$

とは，一見，何の関係もありそうに見えません．

ところで，両者を統一する理論があります．厳密な議論は，大学まで待ってもらわなければなりませんが，

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

という不思議な“公式”と，虚数単位 i を含む複素数の計算(☞ 数学B)さえ，承認してもらえれば，直感的な納得は簡単です．

すなわち

$$e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha$$

$$e^{i\beta}=\cos\beta+i\sin\beta$$

の積が，

$$e^{i(\alpha+\beta)}=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$$

に等しいという．「指数法則」を計算すると，「加法定理」の式が出てくるのです．やってみて下さい．



B.301

(1)　$\log_{16}\sqrt{2}$，$(\sqrt{10})^{\log_{10}2}$ の値を求めよ．

(2)　$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ として，$\log_{10}125$，$\log_{10}\sqrt[3]{0.2}$ の値を求めよ．

アプローチ　(2)では，125，0.2 を，2，3，10 の積と商という形に表します．

解答　(1)　$\log_{16}\sqrt{2}=x$ とおけば，

対数の定義 ▶

$$16^x=\sqrt{2}$$

そして，$16^x=(2^4)^x=2^{4x}$，$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$ だから

$$2^{4x}=2^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore\quad 4x=\frac{1}{2}\quad\therefore\quad x=\log_{16}\sqrt{2}=\boldsymbol{\frac{1}{8}}$$

$(\sqrt{10})^{\log_{10}2}=y$ とおいて，両辺の対数（底は 10）をとると，

$\log_a A^m=m\log_a A$ ▶

$$\log_{10}y=\log_{10}2\cdot\log_{10}\sqrt{10}$$
$$=\log_{10}2\cdot\log_{10}10^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\log_{10}2=\log_{10}\sqrt{2}$$

$$\therefore\quad y=(\sqrt{10})^{\log_{10}2}=\boldsymbol{\sqrt{2}}$$

(2)　$125=5^3=\left(\frac{10}{2}\right)^3$ より，

$$\log_{10}125=3(\log_{10}10-\log_{10}2)$$
$$=3(1-0.3010)$$
$$=\boldsymbol{2.0970}$$

$\sqrt[3]{a}=a^{\frac{1}{3}}$ ▶

$$\log_{10}\sqrt[3]{0.2}=\frac{1}{3}\log_{10}0.2$$
$$=\frac{1}{3}\log_{10}\frac{2}{10}$$
$$=\frac{1}{3}(\log_{10}2-1)$$
$$=\frac{1}{3}(0.3010-1)$$
$$=\boldsymbol{-0.2330}$$

［注］　(1)で $(\sqrt{10})^{\log_{10}2}=10^{\frac{1}{2}\log_{10}2}=10^{\log_{10}\sqrt{2}}$

であるから，B.303 (1)(ア)を用いれば結果 $\sqrt{2}$ が得られる．

B. 302

(1)　2^{22} は何桁の数か．

(2)　0.00125^{90} は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか．

(3)　2^{22} の最初の数字（首位の数字）は 4 であることを示せ．

ただし，$\log_{10}2=0.30103$ として計算せよ．

アプローチ　正数 x の整数部分が n 桁ということは，$10^{n-1}\leqq x<10^{n}$ が成立するということ，これに対し，y の小数第 m 位に初めて 0 でない数字が現れるということは，$10^{-m}\leqq y<10^{-m+1}$ が成立するということです．

解答　**(1)**　$\log_{10}2^{22}=22\log_{10}2=22\times0.30103$

$=6.62266$　………①

$\therefore\quad 6\leqq\log_{10}2^{22}<7$

$\therefore\quad 10^{6}\leqq 2^{22}<10^{7}$

これは，2^{22} が **7 桁**の数であることを示している．

◀ $a>b>0$
$\Leftrightarrow\log_{10}a>\log_{10}b$
☞ A3.5 III

(2)　$\log_{10}0.00125^{90}=90\log_{10}\dfrac{5^{3}}{10^{5}}=90\log_{10}\dfrac{1}{2^{3}\times10^{2}}$

$=-90(3\log_{10}2+2)$

$=-261.2781$

$\therefore\quad -262\leqq\log_{10}0.00125^{90}<-261$

$\therefore\quad 10^{-262}\leqq0.00125^{90}<10^{-261}$

これは，0.00125^{90} の**小数第 262 位**に初めて 0 でない数字が現れることを示す．

(3)　$A=2^{22}$ の首位の数字が 4 であることを示すためには，

$$4\times10^{6}\leqq A<5\times10^{6}$$

すなわち，

$\log_{10}4+6\leqq\log_{10}A<\log_{10}5+6$　………②

を示せばよい．ところが

$\log_{10}4=2\log_{10}2=0.60206,$

$\log_{10}A-6=0.62266,$　◀ ①を用いた

$\log_{10}5=\log_{10}\dfrac{10}{2}=1-0.30103=0.69897$

であるから，②は確かに成り立つ．■

B.303

(1)　次の等式を証明せよ．

(ア)　$b=a^{\log_a b}$

(イ)　$\log_a b=\dfrac{\log_m b}{\log_m a}$　**(底の変換公式)**

ただし，a，b，m は正で，a，m は1でないとする．

(2)　$\log_2 3=a$，$\log_3 7=b$ とするとき，$\log_{42} 56$ を a，b で表せ．

アプローチ　(1)「a，b，$m>0$；a，$m\neq 1$」は，真数および底の条件です．(2)は(1)の応用です．

解答　**(1)**　(ア)　$x=a^{\log_a b}$ とおくと，対数の定義により

$x=a^c \Longleftrightarrow c=\log_a x$ ▶

$$\log_a b=\log_a x$$

よって　$b=x$．

(イ)　$\log_a b=x$　………①

とおくと，対数の定義から，$b=a^x$ である．

m を底とするこの両辺の対数をとれば，

$$\log_m b=\log_m a^x$$

$$\therefore \quad \log_m b=x\log_m a.$$

したがって，

$$x=\log_a b=\frac{\log_m b}{\log_m a}$$

が成り立つ．

単純な数を底として選び，これで統一的に表現． ▶

(2)　$$\log_{42}56=\frac{\log_2 56}{\log_2 42}=\frac{\log_2(2^3\cdot 7)}{\log_2(2\cdot 3\cdot 7)}$$

$$=\frac{3+\log_2 7}{1+\log_2 3+\log_2 7}$$

ところで，

$\log_a b\cdot\log_b c=\log_a c$ ▶

$$\begin{cases}\log_2 3=a\\ \log_2 7=\log_2 3\cdot\log_3 7=ab\end{cases}$$

であるから，

$$\log_{42}56=\boldsymbol{\frac{3+ab}{1+a+ab}}$$

B. 304

次の各々の方程式を満たす x の実数値を求めよ．

(1)　$2^{2x}-2^{x+1}-3=0$　………　①

(2)　$2\log_x(12-x)=1$　………　②

アプローチ　(1)　$2^x=X$ についての 2 次方程式です．　(2) 対数の定義にもどります．底や真数の条件にも注意しましょう．

解答　（1）　$2^{2x}=(2^x)^2$，$2^{x+1}=2\cdot2^x$

であるから，$2^x=X$ とおくと，

①は，$X^2-2X-3=0$ と書きなおせる．

これを変形して

$$(X+1)(X-3)=0$$

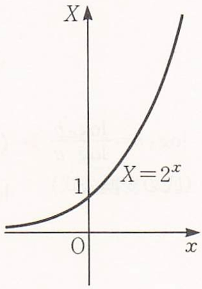
$$\therefore\quad X=-1 \text{ または } X=3$$

ところで，$2^x=X$ を満たす x が存在するのは，

$X>0$ のときであるから，$X=3$，よって

$$2^x=3$$

$$\therefore\quad x=\mathbf{\log_2 3}$$



（2）　まず，真数と底に関する条件から

$$12-x>0,\ x>0,\ x\neq1$$

$$\therefore\quad 0<x<12 \text{ かつ } x\neq1 \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

さて，②は，条件③の下で

$$(12-x)^2=x$$

$$\therefore\quad x^2-25x+144=0$$

と同値である．

これを解いて，

$$x=9,\ x=16$$

このうち③を満足するものを選ぶと，

$$x=\mathbf{9}$$

[注]　(2)では，初めに対数の底を 10 に書き換え

$$\frac{2\log_{10}(12-x)}{\log_{10}x}=1 \quad \therefore\quad 2\log_{10}(12-x)=\log_{10}x$$

とするのも簡明である．☞ B.305

B.305

次の方程式を解け．

(1)　$\log_{10} x^2 = \log_{10}(x+6)$　………　①

(2)　$\log_2 x = \log_4(x+6)$　………　②

アプローチ　(2)では両辺の底をそろえます．

解答　**(1)**　①で両辺の真数を比較して

$$x^2 = x+6$$

$$(x-3)(x+2)=0$$

$$\therefore\quad x=3,\ -2$$

これらの値は，いずれも真数を正にするので適する．

$$x=3,\ -2$$

$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ (底の変換公式)

(2)　$\log_2 x = \dfrac{\log_2(x+6)}{\log_2 4}$　………　③

$\log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$ だから③より，

$$2\log_2 x = \log_2(x+6)$$

$$\therefore\quad \log_2 x^2 = \log_2(x+6) \quad ………　④$$

両辺の真数を比較して，

$$x^2 = x+6$$

$$(x-3)(x+2)=0$$

$$\therefore\quad x=3,\ -2$$

このうち，

$$x=-2$$

は初めの方程式②の真数を負にするので不適．

$$\therefore\quad x=3$$

［注］ 1°　④は①と同じ形をしているから，④の解は(1)により，$x=3,\ -2$ である．しかし，②の解は $x=3$ のみである．すなわち②と④は同値ではない．これは②と④の真数条件に違いがあるからである．

2°　①，②とも，先に真数条件

①：$x^2>0$ かつ $x+6>0$

$\therefore\quad x \neq 0$ かつ $x>-6$

②：$x>0$ かつ $x+6>0$

$\therefore\quad x>0$

を考えておいてもよい．

B.306

方程式

$$4^x-a\cdot 2^{x+1}+a+2=0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす実数 x が存在するような実数 a の値の範囲を求めよ．

アプローチ 「①を解け」といわれたら B.304(1)のようにすればよいでしょう．

解答 $2^x=X$ とおくと，①は，

$$X^2-2aX+a+2=0 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

と書きなおせる．

$2^x=X$ を満たす実数 x が存在するのは，$X>0$ のときだから，

“2次方程式②が，$X>0$ の範囲に少くとも1つの解をもつ”……… (＊)

ための条件を求めればよい．

②の左辺を $f(X)$ とおくと，

$$f(X)=(X-a)^2-a^2+a+2$$

この関数のグラフの対称軸 $X=a$ の位置に注目して分類すると，

i) $a\leqq 0$ のとき，

$(*)\iff f(0)=a+2<0$

$\iff a<-2$

ii) $a>0$ のとき，

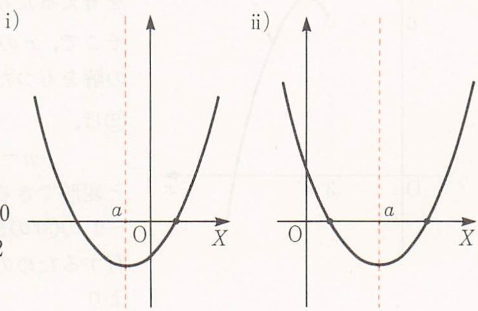
$(*)\iff f(a)=-a^2+a+2\leqq 0$

$\iff a\leqq -1$ または $a\geqq 2$

したがって，求める a の範囲は

$$\boldsymbol{a<-2} \text{ または } \boldsymbol{a\geqq 2}$$

である．



［注］②$\iff X^2+2=2a\left(X-\dfrac{1}{2}\right)$ となることから，XY 平面上で，

$$Y=X^2+2,\quad Y=2a\left(X-\frac{1}{2}\right)$$

のグラフの共有点が $X>0$ の範囲に存在する条件を考えてもよい．

B.307

$$\log_2(x-3)=\log_4(2x-a) \quad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$

を満たす x の実数値が 2 つ存在するような実数 a の値の範囲を求めよ。

アプローチ B.305(2) にならって，まず底をそろえます。

解答 ①の右辺は

$$\frac{\log_2(2x-a)}{\log_2 4}=\frac{1}{2}\log_2(2x-a)$$

と変形できるので，①より

$$2\log_2(x-3)=\log_2(2x-a)$$

$$\log_2(x-3)^2=\log_2(2x-a) \quad \cdots\cdots\cdots \text{①}'$$

$$\therefore \quad (x-3)^2=2x-a \quad \cdots\cdots\cdots \text{②}$$

①′の真数条件ではだめ。

ところで，与えられた方程式①の真数条件より

$$x-3>0 \text{ かつ } 2x-a>0 \quad \cdots\cdots\cdots \text{③}$$

でなければならないが，②の下では，$x-3>0$ を満たす実数 x は $2x-a>0$ を必ず満たす。

したがって，③のかわりに

$$x>3 \quad \cdots\cdots\cdots \text{③}'$$

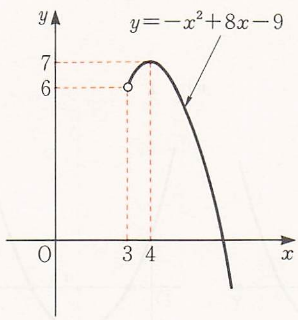
を考えるだけでよい。

そこで，x の 2 次方程式②が③′の範囲に異なる 2 つの解をもつための条件を求めよう。

②は，

$$a=-x^2+8x-9$$

と変形できるから，xy 平面上で，曲線 $y=-x^2+8x-9$ の③′の部分と直線 $y=a$ とが異なる 2 点を共有するための条件を求めればよい。すなわち左図により



$$\mathbf{6<a<7}$$

を得る。

B. 308

a は 1 でない正の実数とする．次の x についての不等式を解け．

$$\log_a(2x+13)>\log_a(4-x) \quad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$

アプローチ　$a>1$ のとき，$\log_a X>\log_a Y \Longleftrightarrow X>Y>0$

$0<a<1$ のとき，$\log_a X>\log_a Y \Longleftrightarrow 0<X<Y$

(☞ A3.5 III)

解答　まず，真数の条件から，

$$\begin{cases} 2x+13>0 \\ 4-x>0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad -\frac{13}{2}<x<4 \quad \cdots\cdots\cdots \text{②}$$

でなければならない．

i）$a>1$ のとき：①は，条件②のもとで次式と同値となる

$$2x+13>4-x$$

$$\therefore \quad x>-3 \quad \cdots\cdots\cdots \text{③}$$

よって，②かつ③より，

$$-3<x<4$$

を得る．

ii）$0<a<1$ のとき：今度は反対に，

$$2x+13<4-x$$

$$\therefore \quad x<-3 \quad \cdots\cdots\cdots \text{④}$$

となり，②かつ④より，

$$-\frac{13}{2}<x<-3$$

を得る．

つまり，①の解は

$$\begin{cases} \boldsymbol{a>1 \text{ のときは } -3<x<4} \\ \boldsymbol{0<a<1 \text{ のときは } -\frac{13}{2}<x<-3} \end{cases}$$

である．

B.309

a を実数として，関数 $y=-(4^x+4^{-x})+4a(2^x+2^{-x})$ について次の問に答えよ．

(1)　$t=2^x+2^{-x}$ とおき，x と t の関係をグラフにかけ．

(2)　y を t の式で表せ．

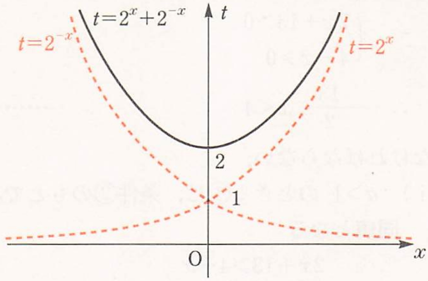
(3)　y の最大値を a の式で表せ．

$2^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ▶

指数関数のグラフは☞A3.4 ▶

グラフから t は x がすべての実数値をとるとき 2 以上のすべての実数値をとることがわかる． ▶

解答　**(1)**　$t=2^x$ と $t=2^{-x}$ のグラフから，$t=2^x+2^{-x}$ の概形は，次のようにかける．



(2)　$4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2$ と表されるので

$$y=-t^2+4at+2$$

(3)　相加平均と相乗平均に関する不等式から

$$2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$$

（等号は，$2^x=2^{-x}$ すなわち $x=0$ のとき）

であるので，t は $x=0$ において最小値 2 をとる．

さらに(**1**)のグラフから，t は 2 以上のすべての実数値をとることがわかる．従って，$t\geqq 2$ を定義域として，y の値の最大値を考えればよい．

ところで，$y=-(t-2a)^2+4a^2+2$ となるが，このグラフは，$(2a,\ 4a^2+2)$ を頂点とする，上に凸の放物線で $t\geqq 2$ だから，

$2a\geqq 2$ のとき，y の最大値は $4a^2+2$

$2a<2$ のとき，y の最大値は $8a-2$

となる．

［注］　不等式 $2^x+2^{-x}\geqq 2$ は，相加・相乗平均の関係からも導かれるがこれでいえるのは，せいぜい，t の最小値が 2 であることにすぎない．グラフを利用して見れば，t が 2 以上のすべての値をとることがいえる．

B. 310

連立方程式 $\begin{cases} x^2=y^3 & \cdots\cdots\text{①} \\ x^y=y^x & \cdots\cdots\text{②} \end{cases}$

の正の解を求めよ．

解答 $x>0$, $y>0$ として，①，②の両辺の(常用)対数をとると，

◀対数の底は別の数でもよい．

$$\begin{cases} 2\log x=3\log y & \cdots\cdots\text{③} \\ y\log x=x\log y & \cdots\cdots\text{④} \end{cases}$$

③×x−④×3 を作り，$\log y$ を消去すると，

$$(2x-3y)\log x=0$$

よって

$$\log x=0 \quad \cdots\cdots\text{⑤}$$

または

$$y=\frac{2}{3}x \quad \cdots\cdots\text{⑥}$$

となる．

i) ⑤を③に代入して，$\log y=0$

$$\therefore\ x=1,\ y=1$$

ii) ⑥を③に代入して

◀③に代入するかわりに①に代入してもよい．"$x>0$, $y>0$" のもとで①と③と同値だからである．

$$2\log x=3\log\frac{2}{3}+3\log x$$

$$\therefore\ \log x=-3\log\frac{2}{3}=\log\left(\frac{3}{2}\right)^3$$

$$\therefore\ x=\frac{27}{8}$$

となり，このとき⑥から，$y=\dfrac{9}{4}$

以上をまとめて，

$$\boldsymbol{x=y=1} \text{ または } \boldsymbol{x=\frac{27}{8},\ y=\frac{9}{4}}$$

［注］ $x=1$ のとき①，②より $y=1$ となる．そこで $x\neq1$ を仮定して，x を底とする対数をとると，

$$\begin{cases} 2=3\log_x y \\ y=x\log_x y \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} \log_x y=\dfrac{2}{3} \\ y=\dfrac{2}{3}x \end{cases}$$

となるが，これから y を消去していくのも本質的に上と同じである．

B. 311

濾（ろ）過するたびに飲料水に含まれる有害物質の20%を除去することのできる浄化装置がある．この装置で濾過を繰り返すことによって，有害物質を当初含まれている量の5%以下にしたい．最低何回繰り返せばよいか．

ただし，$\log_{10}2=0.3010$ として計算せよ．

解答 最初に含まれていた有害物質の量を P_0，n 回濾過を繰り返した後に含まれている有害物質の量を P_n とすると，

$$P_n=P_{n-1}\times(1-0.2)=0.8\cdot P_{n-1} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

$$\therefore\ P_n=0.8^n\times P_0 \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

が成り立つ．

▶「等比数列」のひとつ．
☞大学への数学A ニューアプローチ，A2.3

したがって，

$P_n\leqq 0.05\times P_0$ となるための条件は，

$$0.8^n\leqq 0.05 \quad \cdots\cdots ①$$

である．

①の両辺の10を底とする対数をとり，

$$n\log_{10}0.8\leqq\log_{10}0.05$$

$$n(3\log_{10}2-\log_{10}10)\leqq-(\log_{10}2+\log_{10}10)$$

▶ $0.8=\dfrac{2^3}{10}$，$0.05=\dfrac{1}{2\times 10}$

$$-(1-3\log_{10}2)n\leqq-(\log_{10}2+1)$$

$$\therefore\ n\geqq\frac{\log_{10}2+1}{1-3\log_{10}2}=\frac{1.301}{0.097}=13.41\cdots$$

よって，

濾過は最低 **14 回**繰り返せばよい．

§4 微 分

□ キー・ワード (A基礎理論篇)

- 微分法
  - → 関数の極限 → 定義と記号 → 極限値，収束，発散
    - → 関数の連続性
    - → 無限大への発散
    - → 極限についての公式 → 不定形の極限値
  - → 微分係数と導関数
    - → 微分の公式(定数倍・和・差・積)
    - → $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$
    - → 微分係数と接線
  - → 導関数の符号と関数の増加・減少
    - → 極大・極小 → 必要条件 $f'(a)=0$
      - → 判定法
    - → 増減表とグラフ
  - → 導関数の応用 → 最大・最小
    - → 不等式・方程式
    - → 関数のグラフ → 代表的な 3 次関数・4 次関数
    - → 速度・加速度

数学IIにおける微分法は，論理的根拠よりは，簡単な関数に対する計算法を直観的に理解することを目指すことになっているが，本書の読者は，それで満足する諸君ではないであろう．ここでは，標準的な参考書などでは敬遠されている基礎概念(極限，連続，極限値の計算の基本原理，無限大，不定形……)から説明しよう．「教科書準拠」スタイルで本書を学習したいと願う読者は，初めの5節を飛ばし，A4.6「微分関数と導関数」から読み始め，一通り学習を終えた後で初めに戻るのが良かろう．

A4.1 関数の極限の定義

たとえば，関数 $f(x)=x^2$ において，x の値が2に近づけば，関数値 $f(x)$ が4に近づく．

極限の定義

[定義] 関数 $y=f(x)$ において，x が a と異なる値を取りながら a に限りなく近づくとき，$f(x)$ が一定値 l に限りなく近づくならば，“x が a に近づくとき，$f(x)$ は **極限値 をもつ**”といい，l をその **極限値** と呼ぶ．

極限の記号

記号では，

$x\to a$ のとき $f(x)\to l$

または

$\lim_{x\to a}f(x)=l$ で表す．

1° 例1 $x\to 2$ のとき $x^2\to 4$．

2° 例2 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ は，$x=1$ では定義されていないが

$x\to 1$ のとき，$f(x)\to 2$ である。なぜなら，$x\neq 1$ のとき

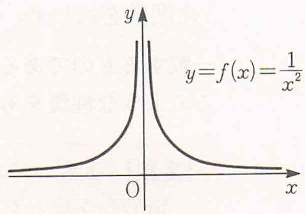
$f(x)=x+1$ であるから，$\lim_{x\to 1}(x+1)=2$ となるからである．

3° $f(x)$ が極限値 l をもつことを，$f(x)$ は，l に **収束** (converge) するともいう．

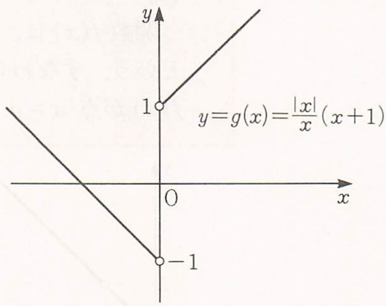
$f(x)$ と a によっては，極限値 $\lim_{x\to a}f(x)$ は存在するとは限らない。この極限値が存在しないならば，$x\to a$ のとき $f(x)$ は **発散** (diverge) するともいう．

例3　x が 0 に近づくとき，$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ の値は限りなく大きくなってしまい，ある定数に近づくというようにはならない．

したがって，$\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}$ は存在しない．



例4　$g(x)=\dfrac{|x|}{x}(x+1)(x\neq 0)$ は $x>0$ では $g(x)=x+1$，$x<0$ では $g(x)=-x-1$ であるから，x が 0 に近づくときに，0 の右側からのみ近づくとすれば $g(x)$ は 1 に近づき，左からのみ近づくとすれば $g(x)$ は -1 に近づく．いいかえれば，0 に近づく近づき方で $g(x)$ の近づく値が異なる．したがって，$x\to 0$ のとき $g(x)$ の極限値は存在しない．



4°　$\lim_{x\to a}f(x)=l$ においては，x の a への近づき方として $x\neq a$ という制限のもとでのあらゆる近づき方を考えるのであるが，$f(x)$ の l への近づき方は，どういうものでもかまわない．途中で l に一致することがあってもよいし，最初から l に一致したままであっても差支えない．

たとえば，$f(x)=C$ (定数関数) なら，どんな a の値に対しても，$\lim_{x\to a}f(x)=C$．

5°　$\lim_{x\to a}f(x)$ の値は，$f(x)$ の形と x の近づく相手 a とによるのであり，x という文字の種類にはよらない．すなわち，

$$\lim_{x\to 2}x^2=\lim_{t\to 2}t^2=4,$$

一般に　$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{t\to a}f(t)=\lim_{u\to a}f(u)$ である．

A 4.2　連続の概念

関数値 $f(a)$ と，極限値 $\lim_{x\to a}f(x)$ とは混同されやすいが，異なった概念である．つまり，一方が存在するが他方が存在しない場合，両方とも存在するが両者の値がくい違う場合などがある．

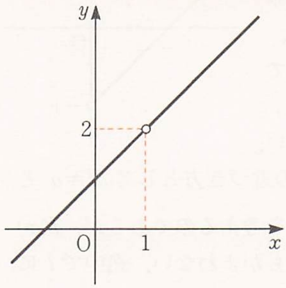
しかし，幸いなことに，数学IIの微分法であつかう関数は，

3次関数をはじめ，すべて，$f(a)$ と $\lim_{x \to a} f(x)$ はともに存在して一致するものである．

このような性質をもつ関数を **連続** と呼ぶ．すなわち

> **[定義]**　$x=a$ において，関数値 $f(a)$ と極限値 $\lim_{x \to a} f(x)$ がともに存在し，その値が一致するとき，
>
> 関数 $f(x)$ は，点 $x=a$ で連続である
>
> という．すなわち，
>
> $f(x)$ が点 $x=a$ で連続 $\iff f(a)=\lim_{x \to a} f(x)$

点で連続



1°　研究　分数関数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ については，p.152 の例 2 で見たように，$\lim_{x \to 1} f(x)=2$ であるが，$f(1)$ は存在しない．したがって，この $f(x)$ は $x=1$ で連続でない．

直観的にいえば，不連続な点で，関数のグラフは切れている．

A 4.3　極限値を計算するための基本公式

関数の極限値の計算に用いられる次の定理の厳密な証明は，高校数学の範囲外であるが，しかし，“限りなく近づく”という直観にもとづいて納得することができるであろう．

> **[定理]**　$\lim_{x \to a} f(x)=\alpha$，$\lim_{x \to a} g(x)=\beta$
>
> （α，β：有限確定値）
>
> ならば，
>
> (1)　$\lim_{x \to a} kf(x)=k\alpha$　（ただし，k は定数）
>
> (2)　$\lim_{x \to a} \{f(x)+g(x)\}=\alpha+\beta$
>
> 　　$\lim_{x \to a} \{f(x)-g(x)\}=\alpha-\beta$
>
> (3)　$\lim_{x \to a} \{f(x)\cdot g(x)\}=\alpha\beta$
>
> 　　$\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$　（ただし，$\beta \neq 0$）

極限値を計算するための基本公式

1°　この原理のおかげで，

$$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha \quad \text{と} \quad \lim_{x\to a} g(x)=\beta$$

が求められていれば，より複雑な形の極限値，たとえば

$$\lim_{x\to a}\left\{\frac{3f(x)^2-4g(x)}{g(x)^3}\right\}$$

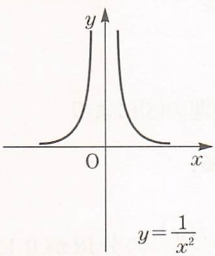
も計算できる $\left(答は\ \dfrac{3\alpha^2-4\beta}{\beta^3}\right)$. ただし，$\beta\neq 0$ とする．

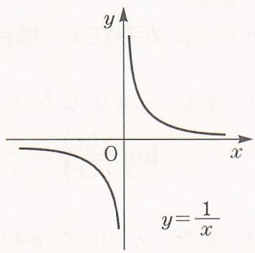
A4.4 無限大

$x\to 0$ のとき $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$，$g(x)=\dfrac{1}{x}$ はいずれも発散する．

どちらについても，x が 0 に近づくにつれて，関数値の絶対値は限りなく大きくなる．

ただ，$g(x)$ については，x が正の方から 0 に近づくか負の方から 0 に近づくかによって $g(x)$ の符号が異なる．これに対し，$f(x)$ は x が 0 に近づく限り，関数値はつねに正で限りなく大きくなってゆく，これを，短く言うために，「無限大」という用語を数学に導入する．





正の無限大

> [定義]　x が a に限りなく近づくにつれて，
> 関数値 $f(x)$ が限りなく大きくなるならば，
>
> $x\to a$　のとき　$f(x)\to+\infty$
>
> あるいは，
>
> $$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$$
>
> と書き，
>
> x が a に近づくとき，$f(x)$ は
>
> **正の無限大** に発散する
>
> という．

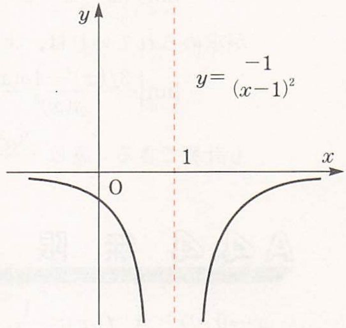
1° 同様に，「負の無限大に発散する」ことや，記号

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

が定められる．

2° 例 1 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$,

$$\lim_{x\to 1}\frac{-1}{(x-1)^2}=-\infty$$



例 2 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left|\frac{1}{x}\right|=+\infty$ であるが，

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=+\infty$ でも，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}==-\infty$

でもない．

3° 記号"∞"は，無限大と読まれるが，これは，数とは見なされない．

A4.5 不定形の極限値の求め方

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ を求める問題において，$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$,

$\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)=\beta$ が存在する場合を考える．

i) もし，$\beta\neq 0$ ならば，A4.3 の定理の(3)により

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\alpha}{\beta} \qquad \text{となる.}$$

ii) また，$\beta=0$ で $\alpha\neq 0$ ならば，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ の分母が 0 に近づき，分子が 0 でない値に近づくのであるから，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ の絶対値は限りなく大きくなる．したがって極限値は存在しない．

iii) 残る場合は $\alpha=\beta=0$ の場合である．形式的には，$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ が $\dfrac{0}{0}$ の形になる場合である．このようなとき，極限値が存在するか否かは，個々の場面で異なってくる．極限値が存在する場合でもその値は，場合々々に応じて異なる．そういう理由で，この場合求める極限値は「$\dfrac{0}{0}$ の **不定形**」で

あるという．このような不定形の極限値はこれから学ぶ微分法の中で，最も大切な役割を演ずる．

1°　例1　$\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$ において，$x\to 1$ のとき

$$x^2-1\to 0,\ かつ\ x^2+x-2\to 0$$

となるので，このままでは，“$\dfrac{0}{0}$ の不定形”である．

ところで，

$$x^2-1=(x+1)(x-1),\quad x^2+x-2=(x-1)(x+2)$$

であるから，$x\neq 1$ の範囲では分母分子を $x-1$ で **約分** することができて

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-1}=\frac{x+2}{x+1}$$

となる．よって

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x+1}=\frac{3}{2}$$

として，極限値がわかる．

このように，分母分子が整式の不定形では 0 となる因数をくり出して約分することで極限値が見えてくる．

2°　例2　$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$　も $\dfrac{0}{0}$ の不定形である．

分子の有理化を行ってみる．

$$\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\frac{(\sqrt{x+4}-2)\times(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$=\frac{(x+4)-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

したがって，$x\neq 0$ の範囲では

$$\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}$$

である．よって

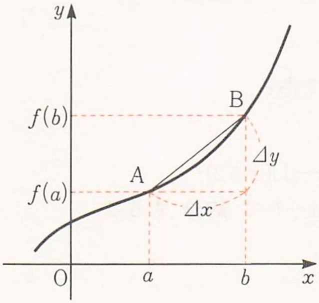
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}$$

$$=\frac{1}{4}$$

このように，分母，分子に根号が入った不定形では，適当に有理化を行ってから約分するのが定石である．

A 4.6 微分係数と導関数

I．平均変化率　関数 $y=f(x)$ において，x が a から b まで変化するとき，それにともなう y の変化量は $f(b)-f(a)$ である．



x の変化量 $b-a$ を **x の増分**

y の変化量 $f(b)-f(a)$ を **y の増分**という．

x の増分を Δx，y の増分を Δy と書き表すことが多い．すなわち，

$$\Delta x=b-a,\quad \Delta y=f(b)-f(a)$$

このとき，x の増分に対する y の増分の割合

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

を，x が a から b まで変わるときの関数 $y=f(x)$ の **平均変化率** という．

1°　平均変化率は上の図において，弦 AB の傾きを表している．

2°　例1　$f(x)=x^2$ の x が 3 から $3+h(h\neq 0)$ まで変わるときの平均変化率は

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{(3+h)-3}=\frac{(3+h)^2-3^2}{h}=\frac{6h+h^2}{h}=6+h$$

3°　増分の記号 Δx，Δy に現われる Δ は，英語で「差」を表す単語 difference の最初の文字 d にあたるギリシャ大文字［デルタ］である．

II．微分係数

関数 $y=f(x)$ において，x が a から $a+h$ まで変わるときの

$$\text{平均変化率}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

の，h を限りなく 0 に近づけたときの極限値を考える．この極限値が存在するならば，この極限値を

$x=a$ における $f(x)$ の **微分係数**

といい，記号 $f'(a)$ で表す．

すなわち，

微分係数の定義

> **[定義]**
>
> $$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

1°　極限値を表す方法は，いろいろある．(☞A4.1の5°，p.153)
次の書き方もよく使われる．$a+h=x$ とおいているのである．

> **[定義]**
>
> $$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

2°　例2　$f(x)=x^2$ の $x=3$ における微分係数は，

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-9}{h}=\lim_{h\to 0}(6+h)=6$$

(前頁の例1と見比べよ)

また，$g(x)=x^3$ の $x=1$ における微分係数は，

$$g'(3)=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$$

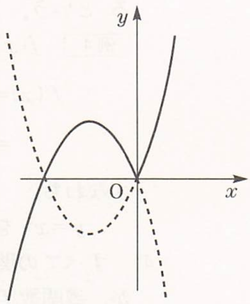
3°　微分係数 $f'(a)$ は存在するとは限らない．$f'(a)$，すなわち極限値 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ が存在する($f'(a)$ が定義できる)とき，$f(x)$ は **$x=a$ において微分できる** という．

例3　$f(x)=|x|(x+1)$ において $f'(0)$ を考察しよう．

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}(h+1)$$

が存在しないことは，A4.1の3°に調べた．

よって，$f'(0)$ は定義できない．したがって $f(x)=|x|(x+1)$ は $x=0$ で微分できない．



4°　2次関数，3次関数などの関数(整式で表される関数)は任意の点において微分できる．

Ⅲ. 導 関 数

関数 $y=f(x)$ が与えられたとき，x のおのおのの値 a に対しそれぞれ微分係数 $f'(a)$ を対応させれば，この対応は1つの新しい関数となる．

$$a \longmapsto f'(a)$$

この関数を $f'(x)$ で表し，関数 $f(x)$ の **導関数** とよぶ．すなわち，

導関数の定義

> [定義]
>
> $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
>
> で定められる関数を，$f(x)$ の導関数という．

1°　関数 $y=f(x)$ において，x の増分を Δx，それに対応する y の増分を Δy とすれば，$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ であり，

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

と表される．

2°　関数 $y=f(x)$ の導関数を表す記号としては $f'(x)$ の他に

導関数の記号

$$y',\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d}{dx}f(x)$$

などが用いられる．

3°　$f(x)$ の導関数を求めることを，$f(x)$ を **微分** (differentiate) **する** という．

例4　$f(x)=x^2$ に対しては，

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$$

すなわち，

$y=x^2$ を微分すると $y'=2x$ となる．

4°　すべての関数が，その導関数をもつわけではない．関数 $f(x)$ が，導関数 $f'(x)$ をもつのは，上式の右辺の極限値が定義できる場合だけである．もっとも，IIの3°で述べたように，数学II以下で扱う3次関数や4次関数は，必ず導関数をもつ．(つまり，$f(x)$ が微分できる場合である．)

5°　導関数の定義と微分係数との関係から

> ($f(x)$ の $x=a$ における微分係数)=($f'(x)$ の，$x=a$ における値)

これは，$f'(x)$ が後出の公式などにより別途計算できるときに特に有効である．また，前節IIで導入した記号 $f'(a)$ は，本節で定義した関数 $f'(x)$ の $x=a$ における値を表していると考えてよい．

例5　$f(x)=x^2$ ならば $f'(x)=2x$ である．(☞ 例4)
よって，$f(x)=x^2$ の $x=3$ における微分係数は $f'(3)=2\cdot3=6$

6°　関数 $y=f(x)$ の導関数を $\dfrac{dy}{dx}$ と表すとき (☞ 2°)，$x=a$ における微分係数は，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ と表す．

A 4.7 微分の公式

いちいち導関数の定義にもどって，導関数を計算するわずらわしさを軽減してくれる公式がある．数学IIの範囲で最も重要なのは，以下に述べる公式である．

定数関数の導関数

[定理]　$$\frac{d}{dx}1=0$$

1°　証明：$f(x)=1$　(定数関数) なら，

$$f(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1-1}{h}=0$$

2°　まったく同様にして

任意の定数Cに対し

$$\frac{d}{dx}C=0$$

が証明できる．

x^m(m：正整数) の微分法

[定理]　$$\frac{d}{dx}x^m=mx^{m-1}$$

(ただし，m は正の整数)

1°　例1　$\dfrac{d}{dx}x^2=2x$，$\dfrac{d}{dx}x^3=3x^2$

2° 証明は，因数分解の公式

$$a^m - b^m = (a-b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \cdots\cdots + a^2b^{m-3} + ab^{m-2} + b^{m-1})$$

において，

$$a = x+h,\ b = x$$

とおいて得られる式を利用して，

$$\frac{(x+h)^m - x^m}{h} = (x+h)^{m-1} + (x+h)^{m-2}\cdot x + (x+h)^{m-3}\cdot x^2 + \cdots\cdots + (x+h)^2\cdot x^{m-3} + (x+h)\cdot x^{m-2} + x^{m-1}$$

を作り，ここで $h \longrightarrow 0$ としたとき，右辺の各項が x^{m-1} に収束することから，

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^m - x^m}{h} = mx^{m-1}$$

を導けばよい．

この他，2 項定理を用いる証明や，積の微分の公式（後述）を用いて数学的帰納法に訴える証明などがある．

3° x^0 が定数関数 1 を表すという通常の約束に従えば，上の公式は，$m=0$ のときにも正しい．初めにあげた公式

$$\frac{d}{dx}1 = 0$$

と一致するからである．

以上の基本公式が，役に立つのは，微分に関して次の性質が成り立つからである．

微分の線形性

［定理］ 関数 u，v が微分できるとき

(1) c が定数ならば，$(cu)' = c(u')$

(2) $(u+v)' = u' + v'$，$(u-v)' = u' - v'$

1° この性質は，次のように応用される．

例 2 $y = 2x^3 - 3x + x$ ならば

$$\begin{aligned} y' = (2x^3 - 3x + 4)' &= (2x^3)' - (3x)' + 4' \\ &= 2(x^3)' - 3(x)' \\ &= 6x^2 - 3 \end{aligned}$$

例 3

$$\begin{aligned} \{(x+1)^2\} &= (x^2 + 2x + 1)' \\ &= (x^2)' + 2x' + 1' = 2x + 2 \\ &= 2(x+1) \end{aligned}$$

2° $(u+v)' = u' + v'$ の証明：

$$(u+v)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)\}-\{u(x)+v(x)\}}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right\}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$
$$=u'+v' \quad ■$$

他の証明も同様である．各自試みよ．

以下の公式は，数学IIでは必修でないが，大学への数学を学ぶ諸君は是非とも修得してほしい．

積の微分法

> [定理]　x の関数 u，v が微分できるとき，
> $$(uv)'=u'v+uv'$$

1°　例4　$f(x)=(x^2+1)(4x-5)$ ならば
$$f'(x)=(x^2+1)'(4x-5)+(x^2+1)(4x+5)'$$
$$=2x(4x-5)+(x^2+1)\cdot 4=2(6x^2-5x+2)$$

2°　$(uv)'=u'v+uv'$ の証明：

$f(x)=uv=u(x)v(x)$ とすると，
$$f(x+\Delta x)=u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)$$
だから
$$f(x+\Delta x)-f(x)=u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)$$
$$=\{u(x+\Delta x)-u(x)\}v(x+\Delta x)+u(x)\{v(x+\Delta x)-v(x)\}$$
$$\therefore\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot v(x+\Delta x)+\lim_{\Delta x\to 0}u(x)\cdot\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)+u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$
$$=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

$(ax+b)^m$ の微分法

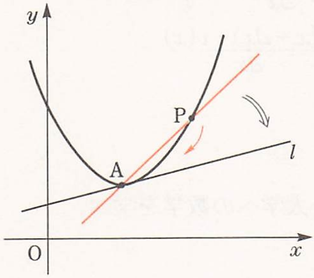
> [定理]　$$\frac{d}{dx}(ax+b)^m=ma(ax+b)^{m-1}$$
> （a，b は定数，m は正の整数）

1°　例5　$y=(5x^2+3x-1)^4$ なら $y'=4(5x^2+3x+1)^3(10x+3)$

$y=(4x-3)^9$ なら $y'=9(4x-3)^8\cdot 4=36(4x-3)^8$

2°　証明は，積の微分公式と数学的帰納法による．

A 4.8 微分係数と接線



関数 $y=f(x)$ のグラフ，すなわち，曲線 $y=f(x)$ 上の定点をAとする．

曲線上の動点Pが $P \neq A$ という制限条件を満たしながら，曲線上をAに限りなく近づくとき，直線APがある定直線 l に限りなく近づくならば，この定直線 l のことを，点Aにおける曲線 $y=f(x)$ の **接線** といい，Aをその **接点** という．

2点A，Pの座標を

$$A(a,\ f(a)),\ P(a+h,\ f(a+h))$$

とすれば，

$$\text{直線APの傾き}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=(\text{平均変化率})$$

であってPがAに限りなく近づくことは $h \to 0$ に相当している．よって，

接線の傾きと微分係数

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $A(a,\ f(a))$ での接線の傾きは，

関数 $y=f(x)$ の $x=a$ での微分係数 $f'(a)$ に等しい．

したがって，

接線の公式

[公式] 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $A(a,\ f(a))$ での接線の方程式は，

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

で与えられる．

1° 微分係数 $f'(a)$ が定義できないとき，点 $(a,\ f(a))$ での接線は y 軸に平行の場合を除き，存在しない．☞4°

2° 例1 $y=x^2$ とすると $y'=2x$.

そこで，$y=x^2$ 上の点 $(1,\ 1)$ での接線の傾きは

$$y'|_{x=1}=2\cdot1=2.$$

よって，$y=x^2$ 上の点 $(1,\ 1)$ での接線は

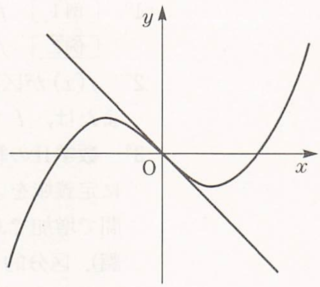
$y-1=2(x-1)$，すなわち，$y=2x-1$

3°　例2　$y=x^3-x$ とすると，$y'=3x^2-1$.

そこで，$y=x^3-x$ 上の点 $(0,\ 0)$ での接線の傾きは $y'|_{x=0}=-1$ であり，その方程式は

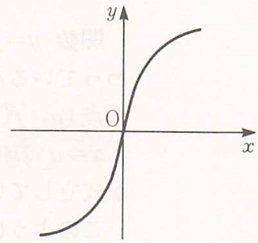
$y-0=-1\cdot(x-0)$，すなわち $y=-x$

である.



曲線 $y=x^3-x$ は，$x<0$ での接線の下側，$x>0$ で接線の上側にくる．このように，曲線と接線の上下関係が接点の前後で逆転することがある！

4°　$f'(a)$ が存在しなくても y 軸平行の接線は存在することがある.



例3　$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & (x\geqq 0)\\ -\sqrt{-x} & (x\leqq 0)\end{cases}$

とすると，$f'(0)$ が存在しないが，$y=f(x)$ のグラフは，原点で y 軸に接する.

A 4.9　関数の増減・極大・極小と微分係数

関数 $y=f(x)$ において，ある区間で

x が増すと $y=f(x)$ も増す

とき，関数 $y=f(x)$ は

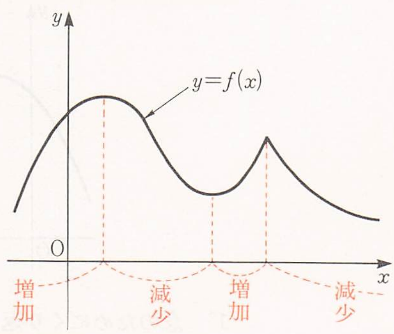
この区間で **増加** である

といい，反対に，

x が増すと $y=f(x)$ が減る

とき，この区間で **減少** である

という．もっと正確には，



増加と減少

[定義]　関数 $f(x)$ について，区間 I に属する任意の x_1，x_2 に対し，

(1)　$x_1<x_2 \Longrightarrow f(x_1)<f(x_2)$

　のとき，$f(x)$ は区間 I で増加である

(2)　$x_1<x_2 \Longrightarrow f(x_1)>f(x_2)$

　のとき，$f(x)$ は区間 I で減少である

1°　例1　$f(x)=x-1$ は任意の区間で増加.

　例2　$f(x)=|x|$ は区間 $x \leqq 0$ で減少，区間 $x \geqq 0$ で増加.

2°　$f(x)$ が区間 I で **単調** であるとは，$f(x)$ が I で増加であるか，または，I で減少であることである.

3°　数学IIの範囲にあらわれる関数は，すべて連続であるが，さらに定義域をいくつかの小区間に然るべく分割してやれば，各小区間で増加であるか，または減少であるようにできる（区分的に単調）. 区分的に単調でない関数は，数学IIIで，そして本格的には大学の数学で学ぶ.

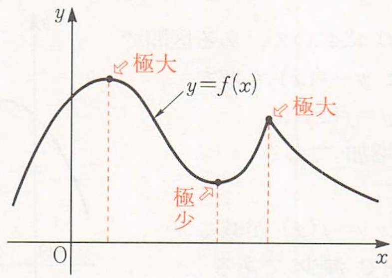
関数 $y=f(x)$ が $x=a$ を境目として増加から減少へ移り変わっているなら，

点 $(a,\ f(a))$ はグラフの山の頂上になっていて，
$x=a$ の付近（ただし，$x \neq a$）では $f(x)<f(a)$　………Ⓐ

が成立している.

このように，Ⓐが成立するとき $f(x)$ は $x=a$ で **極大** であるといい，$f(a)$ を **極大値** という. すなわち，極大値は関数の局所的な最大値である.

同様にして，$x=a$ において **極小** の意味や，**極小値** の意味も定められる.



1°　念のためにくり返すと，$f(x)$ が $x=a$ で極大ならば，$f(a)$ は $x=a$ の付近における $f(x)$ の最大値になっている.

　$f(x)$ が $x=a$ で極小ならば，$f(a)$ は $x=a$ の付近における $f(x)$ の最小値になっている.

　もちろん，$x=a$ の付近における話であって，変域全体での最大最小と，極大極小との間には単純な関連はない.

2°　“$x=a$ の付近では”（あるいは，“$x=a$ の近傍では”）という用語は便利なのでよく用いられる. これは，

“$x=a$ を内部に含む十分小さい開区間をとれば，そこで”という意味である．

3°　極大値，極小値を一括して，**極値** という．これを極限値と混同しないこと．

増減と極値

> **[定理]**　$f(x)$ が $x=a$ で連続で，その近くでは
>
> (1)　$x=a$ の左側で増加，$x=a$ の右側で減少 ならば，$f(x)$ は $x=a$ で極大
>
> (2)　$x=a$ の左側で減少，$x=a$ の右側で増加 ならば，$f(x)$ は $x=a$ で極小
>
> である．

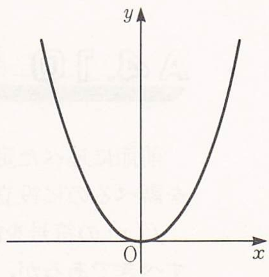
1°　いいかえれば，

“$x=a$ の前後で増加から減少に移り変われば $x=a$ で極大である”

ということになる．極小についても同様．

微分係数の符号と増加・減少

> **[定理]**　関数 $f(x)$ が，区間 I のすべての x に対して，
>
> (1)　$f'(x)>0$ ならば　$f(x)$ は I で増加である．
>
> (2)　$f'(x)=0$ ならば　$f(x)$ は I で定数である．
>
> (3)　$f'(x)<0$ ならば　$f(x)$ は I で減少である．



1°　例3　$f(x)=x^2$ については，$f'(x)=2x$

区間 $x<0$ で $f'(x)<0$　∴　区間 $x<0$ で $f(x)$ は減少
区間 $x>0$ で $f'(x)>0$　∴　区間 $x<0$ で $f(x)$ は増加

2°　$f'(x)=0$ となる x が1点存在するとき，そこで $f(x)$ が一定といってはならない．実際例3で，$f'(0)=0$ であるが，$f(x)$ は，

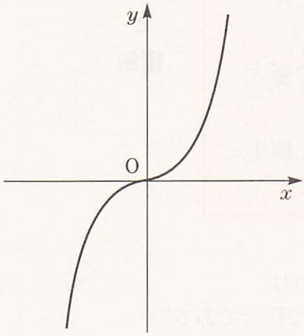
区間 $x\leqq 0$ で減少
区間 $x\geqq 0$ で増加

である．（増加・減少についての初めの定義にあてはめて見よ！）

3°　上の定理の厳密な証明には数学IIIで学ぶ「平均値の定理」が必要である．

> [定理]　$f(x)$ が $x=a$ で微分できるとする．
> このとき $f(a)$ が極大値，または極小値
> $\Longrightarrow f'(a)=0$

極値であるための必要条件



1°　この定理の逆は成立しない！すなわち，

"$f'(a)=0$ であっても，$f(a)$ は極大値，または極小値であるとはかぎらない"

例 4　$f(x)=x^3$，$f'(x)=3x^2$．

$f'(0)=0$ だが，$f(0)$ は極値ではない．

2°　微分できない点がある関数では，$f(a)$ が極値であるからといって $f'(a)=0$ であるとは限らない．

例 5　$f(x)=|x|$，$f(0)$ は極小値であるが，$f'(0)$ は存在しない．

A4.10　関数の増減，極値の調べ方

前節に述べた定理は，導関数を用いて関数 $f(x)$ の増減の様子を調べるのに役立つ．

$f'(x)$ の符号を調べるためには，符号が入れ替わるところを探すべきであるが，数学IIで扱う関数については，$f'(x)$ の符号の変わり目となる x の値は方程式 $f'(x)=0$ の解のうちに含まれる．

調べ方の具体例をあげておこう．

$f(x)=x^3-3x$：導関数を求めると

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

x		-1		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$f'(x)=0$ を解くと $x=\pm1$．

$x=\pm1$ を境目として $f'(x)$ の符号は変化し，これから，$f(x)$ の増減の様子は左の表のようになる．

1°　このような表を **増減表** という．↗は増加を，↘は減少を表している．関数の増減の様子を示すには，増減表が簡単である．

A4.11　導関数の応用

I．　関数の値域，最大・最小

関数 $f(x)$ の値の増減の様子を，

「$f'(x)$ の符号変化を利用して，

定義域全体にわたって調べる」

と，自然に $f(x)$ のとりうる値の範囲(値域)や最大値・最小値を求めることができる．

1°　関数の極大・極小を求めることと，関数の値域や，最大・最小を求めることとは，良く似ているようだが，本質的には別ものである．

極大・極小を求めるのなら，単に $f'(x)$ の符号の変わり目にのみ注目すればよい(関数の局所的考察)が，値域や最大・最小を求めるには，定義域全体にわたって関数の増減の様子を考察しなければならない(関数の大域的考察)．

とくに最大・最小問題を解くときには，定義域の端における様子を調べることが大切である．

ガイド　具体的な手順については　☞B.420

II．不等式の証明

導関数を用いて関数の増減，最大・最小を調べることを，変数を含む不等式に関する問題を解く一つの手段として，利用することがある．

1°　例　「$x\geqq 0$ ならば $(1+x)^5\geqq 1+5x$」

が成り立つことを示そう．

$f(x)=(1+x)^5-(1+5x)$

とおけば，

$f'(x)=5\{(1+x)^4-1\}$

x	0	
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	↗

$x>0$ で $(1+x)^4>1$ であるから $f'(x)>0$．

したがって，$x\geqq 0$ で $f(x)$ は増加である．

したがって，$x\geqq 0$ では $f(x)\geqq f(0)=0$ である．

III. 関数のグラフ

関数のグラフをえがくためには，次のいくつかのポイントを押えることが有効である．

◈ 大域的性質 ◈

1) グラフの存在する範囲(定義域，値域)に注意する．
2) 関数の特徴(たとえば，グラフの対称性など)に注意する．
3) 無限に遠方の様子，漸近線について調べる．

◈ 局所的性質 ◈

1) 関数の増減，極大値・極小値を求める．
2) 特殊な点(関数に不連続な点，微分できない点)などがあれば，その付近の様子を調べる．
3) 座標軸の交点などをみる．

1° 3次関数，4次関数のグラフは問題解法にあたって特に重要である．これらについては，とくにA4.12にまとめておく．

IV. 方程式の多重解

$P(x)$ を多項式，α を定数とするとき，‘$x=\alpha$ が方程式 $P(x)=0$ の解である’とは，‘$P(\alpha)=0$ が成り立つ’こと，すなわち‘$P(x)$ が $x-\alpha$ で割りきれる’ことである．

これに対し，重解は，次のように定義される．

[定義] $x=\alpha$ が方程式 $P(x)=0$ の重解であるとは，$P(x)$ が $(x-\alpha)^2$ で割りきれることである．

重解の定義

重解に関しては，微分法を用いた次の定理がある．

[定理] $P(x)$ を多項式，α を定数とするとき，
α は $P(x)=0$ の重解 $\Longleftrightarrow$ $P(\alpha)=P'(\alpha)=0$

重解と導関数

1° 例 $P(x)=x^3-3x+2$ とおくと，
$P'(x)=3(x^2-1)$ $P(1)=P'(1)=0$ なので $x=1$ はこの方程式の重解である．

実際，

$P(x)=(x-1)^2(x+2)$ であるから，$x=1$ は2重解である．

ガイド 証明などは ☞B.408

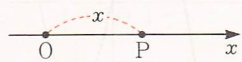
V. 速度，加速度

[定義] x 軸上の動く動点Pの時刻 t における座標（x 座標）を x とする．x は時間 t の関数であり，

Pの速度 $v=\dfrac{dx}{dt}$

Pの加速度 $\alpha=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)$

速度と加速度



$x=x(t)$

1° $v>0$ なら，Pは x 軸の正方向に向かって動いている．
$v<0$ なら，負の方向に向かって動いている．

2° いわゆる“速さ”とは，速度 v の絶対値 $|v|$ のことである．

3° 通常の力学法則に従う運動の場合は，必ず速度をもつので x は t で微分できる．（SF でよく話題となる「瞬間移動」では，速度が定義できない!?）

4° 速度という用語は，必ずしも，動点の位置の変化だけについてだけいわれるのではない．

一般に，時刻 t の関数である量 z に対して $\dfrac{dz}{dt}$ を

z の増加率

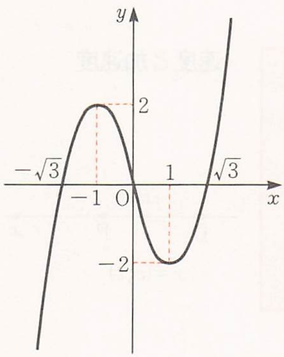
という．増加率が正なら時刻とともに z は増加しつつあり，増加率が負なら減少しつつある．

速度は変位の増加率，加速度は速度の増加率である．

A 4.12　3次関数, 4次関数のグラフの概形

I．　3次関数

代表的な例をあつかう．



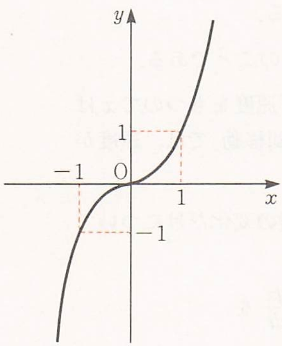
(1)　$y=x^3-3x$：

$y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

増減を表にすると，

x		-1		1	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	2	↘	-2	↗

x 軸とは $x=0$，$\pm\sqrt{3}$ で交わっている．なお，関数は奇関数なのでグラフの原点に関し対称である．



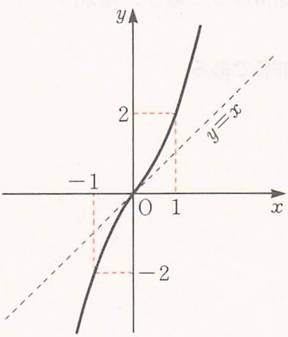
(2)　$y=x^3$：

$y'=3x^2$ だから，増減表は，

x		0	
y'	$+$	0	$+$
y	↗	0	↗

となって，増加関数である．

関数は奇関数なので，グラフは原点に関し対称であり，原点で x 軸に接している．



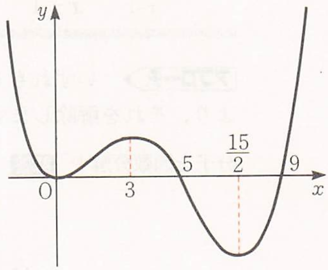
(3)　$y=x^3+x$：

$y'=3x^2+1>0$ であるから増加関数．原点に関して対称で $x=0$ のとき $y'=1$ であるから，原点での接線は $y=x$ である．

(グラフの曲がり方が緩やかで，グラフ表示のアクセントがないので，たとえば，点 $(1,\ 2)$ を通ることなどに注目するとよい)

II.　4次関数

4次以上の関数の扱いは，導関数が3次以上になり，その因数分解に，数学Bで学ぶ因数定理が必要という理由により新課程から除かれた．しかし本書の読者にとって，そのような見せかけの「やさしさ」は，「ありがた迷惑」というものであろう．代表的な例をあつかう．



(1)　$y=x^4-14x^3+45x^2$：

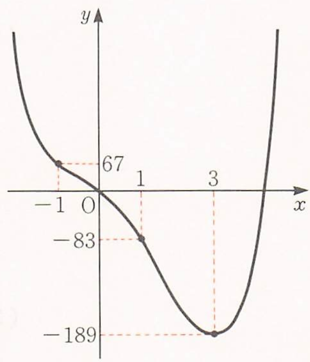
$y'=4x^3-42x^2+90x$

$=2x(x-3)(2x-15)$

増減表は下のようになる．

x		0		3		$\frac{15}{2}$	
y'	−	0	+	0	−	0	+
y	↘	0	↗		↘		↗

x軸では $x=5$，9で交わり，原点で接している．



(2)　$y=x^4-6x^2-72x$：

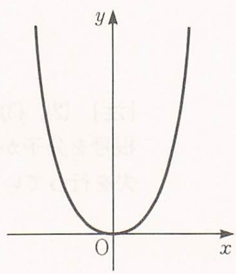
$y'=4x^3-12x-72=4(x-3)(x^2+3x+6)$

任意のxに対し　$x^2+3x+6>0$

であるから，増減表は下のようになる．

x		3	
y'	−	0	+
y	↘	−189	↗

注意　数学IIIで学ぶ方法で曲線の凹凸を調べると，$x=\pm1$ で曲線の凹凸がいれかわることがわかる．



(3)　$y=x^4$：

$y'=4x^3$

増減は単純である．

x		0	
y'	−	0	+
y	↘	0	↗

グラフはy軸に関し対称で，原点でx軸に接している．



——A4　おわり——

B. 401

次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{2x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}$

アプローチ いずれも 0/0 型の不定形なので，ある変形を施すことにより，それを解除します.

分子を因数分解 ▶ **解答** (1)

$$\frac{x^4-16}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{x-2}=(x+2)(x^2+4)\quad(x\neq 2)$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)(x^2+4)=\mathbf{32}$$

(2)

$$\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{2x}=\frac{(2+x)-(2-x)}{2x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=\frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}\quad(x\neq 0)$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}=\mathbf{\frac{\sqrt{2}}{4}}$$

(3)

$$\frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}=\frac{3x+1-2^2}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}=\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}\quad(x\neq 1)$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}=\mathbf{\frac{3}{4}}$$

[注] (2), (3)においては $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ という公式を用いて根号を分子から分母に移して（分子の有理化）から約分するという工夫を行っている.

B. 402

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2+ax-b}{x^3+x-2}=3$ となるように，a，b の値を定めよ．

アプローチ $x\to 1$ のとき，分母$\to 0$ となります．したがって，極限値が存在するためには，分母を0にする因数と同じ因数を分子がもち，それらが打ち消し(約分)合わなければなりません．

解答 $F(x)=\dfrac{x^3+x^2+ax-b}{x^3+x-2}$ とおく．

$x\to 1$ のとき 分母$\to 0$ となるので，$\displaystyle\lim_{x\to 1}F(x)$ が有限確定値となるためには，分子$\to 0$，つまり

$$\lim_{x\to 1}(x^3+x^2+ax-b)=2+a-b=0$$

$$\therefore\quad b=a+2 \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

であることが必要である．

◀ $F(x)$ の分子を $f(x)$ とおくと，$f(1)=0$ つまり，$f(x)$ が $x-1$ を因数にもつ条件に他ならない．

①を $F(x)$ の分子に代入して b を消去すると，

$$F(x)=\frac{x^3+x^2+ax-(a+2)}{x^3+x-2}$$
$$=\frac{(x-1)(x^2+2x+a+2)}{(x-1)(x^2+x+2)}$$
$$=\frac{x^2+2x+a+2}{x^2+x+2}\quad (x\neq 1)$$

◀ ①を用いて，a を消去してもよい．

となる．

よって，

$$\lim_{x\to 1}F(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x+a+2}{x^2+x+2}=\frac{a+5}{4}$$

◀ $\displaystyle\lim_{x\to 1}F(x)$ が存在したので①は十分でもある．

となり，これが3に等しくなるのは

$$a=7 \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

のときである．

ゆえに，①，②から

$$\begin{cases}\boldsymbol{a=7}\\ \boldsymbol{b=9}\end{cases}$$

を得る．

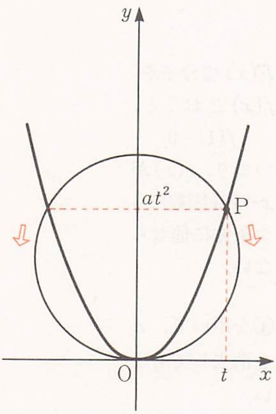
B. 403

原点Oで x 軸に接し，放物線 $y=ax^2$ $(a>0)$ 上のOと異なる点Pを通る円の半径を r とする．このとき，Pを限りなくOに近づけるときの r の極限値を求めたい．

(1) 点Pの x 座標を t とおくとき，r を a と t で表せ．

(2) Pを限りなくOに近づけるときの r の極限値を求めよ．

アプローチ まず，原点Oで x 軸に接する円の方程式を考えます．



解答 (1) 左図のような，原点Oで x 軸に接する半径 r の円の方程式は，

$$x^2+(y-r)^2=r^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

とおける．

円①が点 $\mathrm{P}(t,\ at^2)$ $(t\neq 0)$ を通るとすると，

$$t^2+(at^2-r)^2=r^2$$

$$\therefore\quad t^2+a^2t^4-2art^2=0$$

が成り立ち，$t\neq 0$ であるから

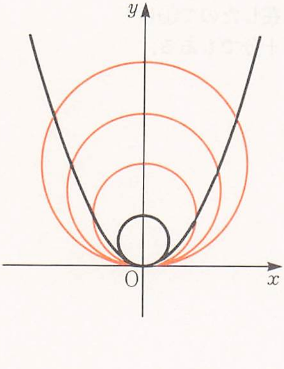
$$r=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{a}}(\mathbf{1}+\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{t}^2)$$

となる．

(2) "Pが限りなくOに近づく"のは，$t\to 0$ のときであるので，(1)から求める極限値

$$\lim_{\mathrm{P}\to\mathrm{O}} r=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2a}(1+a^2t^2)=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{a}}$$

を得る．



研究 本問で求めた極限値は，放物線 $y=ax^2$ の原点付近を，ある円とほぼ等しいと見なした（近似という）ときのその円の半径を意味する，曲率半径と呼ばれるものである．つまり，放物線 $y=ax^2$ と原点で接する円は，$x^2+(y-a)^2=a^2$ や $x^2+(y-2)^2=4$ などいろいろあるが，

半径 $=\dfrac{1}{2a}$ の円：$x^2+\left(y-\dfrac{1}{2a}\right)^2=\left(\dfrac{1}{2a}\right)^2$

が，"最もピッタリと"放物線 $y=ax^2$ と原点Oで接しているということになるわけである．

B.404

a, b を実数の定数，n を自然数とするとき，次の(1), (2)を証明せよ．

(1)　$y=f(ax+b) \Longrightarrow y'=af'(ax+b)$

(2)　$y=(ax+b)^n \Longrightarrow y'=na(ax+b)^{n-1}$

アプローチ　(1)は，導関数の定義に戻ります．(2)は，(1)を利用すればよいでしょう．

解答　(1)　$F(x)=f(ax+b)$ とおくと，

$$y'=F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

◀導関数の定義

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a(x+h)+b)-f(ax+b)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}a\cdot\frac{f(ax+b+ah)-f(ax+b)}{ah}$$

ここで，$ax+b=z$, $ah=t$ とおくと，$h\to 0$ のとき $t\to 0$ だから，

$$y'=\lim_{t\to 0}a\cdot\frac{f(z+t)-f(z)}{t}$$

$$=af'(z)$$

◀導関数の定義

$$=af'(ax+b)$$ ■

(2)　$f(x)=x^n$ とおくと，

$$(ax+b)^n=f(ax+b)$$

となり，微分の公式により，

$$f'(x)=nx^{n-1}$$

◀$(x^n)'=nx^{n-1}$

であるので，(1)の結果から，

$$\{(ax+b)^n\}'=na(ax+b)^{n-1}$$

の成立が導かれる．■

[注]　1°　本問の公式は使える場面が多いので，“積の微分法”の公式(☞ A4.7 p.163) とともに，マスターしておくべきである．次問で練習しよう．

2°　実は，これは数学IIIで学ぶ合成関数の微分法

$$\{f(g(x))\}'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

の特別な場合に過ぎない．

B.405

次の各関数を2通りの方法で微分せよ．

（方法1） 展開して項別に微分する．

（方法2） 前問 B.404 の公式を利用する．

(1) $y=(x+1)^3$ (2) $y=(2x+1)^4$

(3) $y=(2-3x)^5$

アプローチ 微分法の公式を実際に用いる練習です．

(☞ B.404, A4.7)

$\{kf(x)+lg(x)\}'=kf'(x)+lg'(x)$ （k, l：定数）

解答 （1） （方法1） $y=x^3+3x^2+3x+1$

$\therefore\ y'=3x^2+6x+3$

$\{(x+a)^n\}'=n(x+a)^{n-1}$

（方法2） $y=(x+1)^3$

$\therefore\ y'=3(x+1)^2$

（2） （方法1） $y=16x^4+32x^3+24x^2+8x+1$

$\therefore\ y'=64x^3+96x^2+48x+8$

（方法2） $y=(2x+1)^4$

$\therefore\ y'=4(2x+1)^3\cdot 2$

$=8(2x+1)^3$

（3） （方法1） $y=32-240x+720x^2-1080x^3+810x^4-243x^5$

$\therefore\ y'=-240+1440x-3240x^2+3240x^3-1215x^4$

$\{(ax+b)^n\}'=n(ax+b)^{n-1}\cdot a$

$(2-3x)'=-3$

（方法2） $y=(2-3x)^5$

$\therefore\ y'=5(2-3x)^4(-3)$

$=-15(2-3x)^4$

［注］ どちらの方法で微分しても結果は同じであるが，特に，(2), (3) では，（方法2）の方が簡明である．

B. 406

(1)　曲線　$y=x^3-3x$　上の点 A(2, 2) における曲線の接線の方程式を求めよ．

(2)　曲線　$y=x^3-2x^2+1$　に点 B(3, 1) から引いた接線をすべて求めよ．

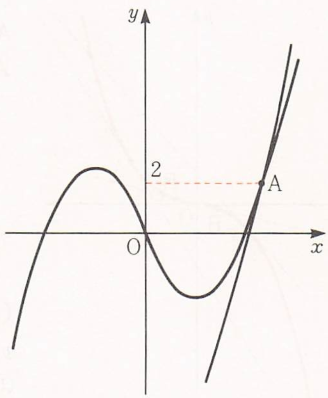
アプローチ　(1)は，接線を求める基本問題です．(2)では，点Bが曲線上の点ではないので，(1)のように，直接求める接線の傾きは分かりません．そこで，$x=t$ なる点における接線を求めて，それが点Bを通ると考えます．これは，この手の問題解法に共通する一般的な手筋です．

解答　**(1)**　$y'=3x^2-3$ より，$x=2$ における接線の傾きは　$y'|_{x=2}=3\cdot 2^2-3=9$ である．

よって，

$$y-2=9(x-2)$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{y=9x-16}$$



(2)　$y=x^3-2x^2+1$　……… ①

より，$y'=3x^2-4x$ となるので，曲線①の $x=t$ なる点における接線は

$$y-(t^3-2t^2+1)=(3t^2-4t)(x-t)$$

$$\therefore\quad y=(3t^2-4t)x-2t^3+2t^2+1 \quad\cdots\cdots ②$$

である．

これが点 B(3, 1) を通るのは，

$$1=3(3t^2-4t)-2t^3+2t^2+1$$

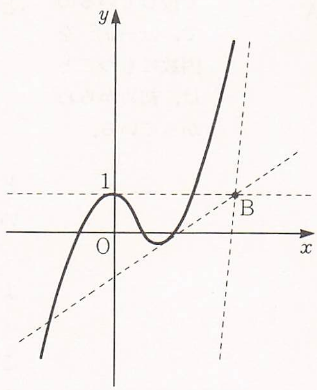
$$\therefore\quad 2t^3-11t^2+12t=0$$

$$\therefore\quad t(2t^2-11t+12)=0$$

$$\therefore\quad t(t-4)(2t-3)=0$$

$$\therefore\quad t=0 \text{ または } 4 \text{ または } \frac{3}{2}$$

のときである．



よって，これらの t の値を②に代入することにより，求める接線は3本あり，その方程式は

$$\boldsymbol{y=1} \text{ と } \boldsymbol{y=32x-95} \text{ と } \boldsymbol{y=\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}}$$

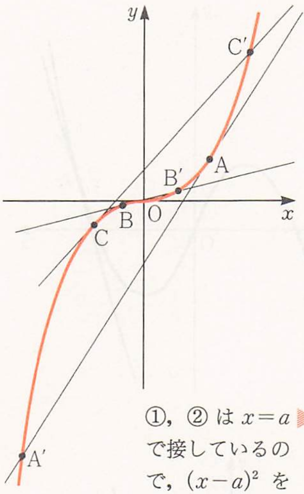
となる．

B.407

曲線 $y=x^3$ …… ① 上の異なる3点A, B, Cのx座標をそれぞれa, b, cとする.

(1) A, B, Cが1直線上にあるためのa, b, cの条件を求めよ.

(2) A, B, Cにおける接線が再びこの曲線と交わる点をそれぞれA′, B′, C′とする. A, B, Cが1直線上にあれば, A′, B′, C′もまた1直線上にあることを示せ.



解答 A(a, a^3), B(b, b^3), C(c, c^3)である.

(1) "A, B, Cが相異なる点"であることから, A, B, Cが1直線上にあるための必要十分条件はAB, ACの傾きが一致すること, つまり

$$\frac{a^3-b^3}{a-b}=\frac{a^3-c^3}{a-c}$$

$\therefore$ $a^2+ab+b^2=a^2+ac+c^2$

$\therefore$ $(b-c)(a+b+c)=0$

であり, $b-c\neq0$ ゆえ これは

$\boldsymbol{a+b+c=0}$ と必要十分である.

(2) ①より $y'=3x^2$ だから, Aにおける接線は

$y-a^3=3a^2(x-a)$ $\therefore$ $y=3a^2x-2a^3$ ………②

①, ②からyを消去すると, $x^3-3a^2x+2a^3=0$

$\therefore$ $(x-a)^2(x+2a)=0$ ………③

となり, これの $x=a$ 以外の解がA′のx座標である.

①, ② は $x=a$ で接しているので, $(x-a)^2$ を因数にもつことは, 初めからわかっている.

したがって, また同様にして

$$\left.\begin{array}{l}\text{A}'\text{の}x\text{座標 } a'=-2a\\ \text{B}'\text{の}x\text{座標 } b'=-2b\\ \text{C}'\text{の}x\text{座標 } c'=-2c\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots④$$

となる.

いま, A, B, Cが1直線上にあるので, (1)により

$a+b+c=0$

よって, ④から

$a'+b'+c'=-2(a+b+c)=0$

これは, $y=x^3$ 上の3点A′, B′, C′も1直線上にあることを示す. ∎

B. 408

整式$P(x)$が$(x-\alpha)^2$を因数にもつための必要十分条件は

$$P(\alpha)=P'(\alpha)=0$$

であることを証明せよ．

アプローチ　まず，一般の多項式$P(x)$を2次式$(x-\alpha)^2$で割ったときの余りを求めましょう．

解答　$P(x)$を$(x-\alpha)^2$で割ったときの商を$q(x)$余りを　$ax+b$　とおくと，

$$P(x)=(x-\alpha)^2q(x)+ax+b \quad \cdots\cdots①$$

が任意の実数xについて成立する．

◀ 2次式で割るのだから，余りは1次以下の整式．

①の両辺をxで微分すると，

$$P'(x)=2(x-\alpha)q(x)+(x-\alpha)^2q'(x)+a \quad \cdots\cdots②$$

◀ 積の微分法

◀ これもxの恒等式．

①，②で　$x=\alpha$　とおくと

$$\begin{cases} P(\alpha)=a\alpha+b \\ P'(\alpha)=a \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} a=P'(\alpha) \\ b=P(\alpha)-\alpha P'(\alpha) \end{cases}$$

となるので，$P(x)$を$(x-\alpha)^2$で割ったときの余りは

$$P'(\alpha)x+P(\alpha)-\alpha P'(\alpha)$$

である．

したがって，$P(x)$が$(x-\alpha)^2$を因数にもつ，つまり，$(x-\alpha)^2$で割り切れるためには

$$P'(\alpha)x+P(\alpha)-\alpha P'(\alpha)=0$$

が恒等的に成立することが必要十分である．そのための条件は

$$\begin{cases} P'(\alpha)=0 \\ P(\alpha)-\alpha P'(\alpha)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} P'(\alpha)=0 \\ P(\alpha)=0 \end{cases}$$

である．∎

◀ 任意のxについて　$\mathrm{A}x+\mathrm{B}=0$
$\iff \mathrm{A}=\mathrm{B}=0$

[注]　整式$P(x)$が$(x-\alpha)^2$を因数にもつとは，方程式　$P(x)=0$　が　$x=\alpha$　を重解にもつことに他ならないので，上で示した定理は，次のように表現できる．

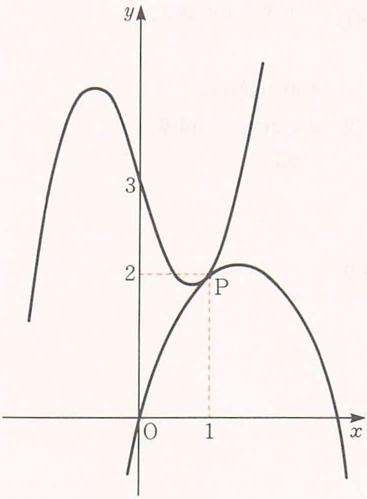
> 整式$P(x)$と定数αについて，
> 方程式　$P(x)=0$　が　$x=\alpha$　を重解にもつ　$\iff P(\alpha)=P'(\alpha)=0$

B. 409

2 曲線 C_1：$y=-x^2+ax$,　C_2：$y=x^3-2x-b$ が点 P(1, c) において接するように定数 a, b, c の値を定めよ.

ただし，2 曲線が“点 P において接する”とは，点 P を共有し，かつ点 P における接線の傾きが一致することであることである.

アプローチ 定義どうりに考えれば解決します.



解答 $\begin{cases} f(x)=-x^2+ax \\ g(x)=x^3-2x-b \end{cases}$ とおくと，

$$\begin{cases} f'(x)=-2x+a \\ g'(x)=3x^2-2 \end{cases}$$

まず，2 曲線 C_1, C_2 が点 P(1, c) を共有するための条件は，

$$f(1)=g(1)=c$$

$$\therefore \begin{cases} a+b=0 & \cdots\cdots\cdots ① \\ c=a-1 & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

であり，さらに，点 P での接線の傾きが一致するための条件は

$$f'(1)=g'(1)$$

$$\therefore \quad a-2=1$$

$$\therefore \quad a=3 \qquad \cdots\cdots\cdots ③$$

である.

よって，③を①，②に代入して

$$\begin{cases} \boldsymbol{a=3} \\ \boldsymbol{b=-3} \\ \boldsymbol{c=2} \end{cases}$$ を得る.

[注] 共通接線が y 軸に平行になる場合を除けば

2 曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ が $x=\alpha$ なる点で接する $\Longleftrightarrow \begin{cases} f(\alpha)=g(\alpha) \\ f'(\alpha)=g'(\alpha) \end{cases}$

が成り立つ.

これは，$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくとき，$h(\alpha)=h'(\alpha)=0$ とも同値となるので，整式 $h(x)$ は $(x-\alpha)^2$ を因数にもつことになり (☞ B. 408)，次のような解法も可能となる.

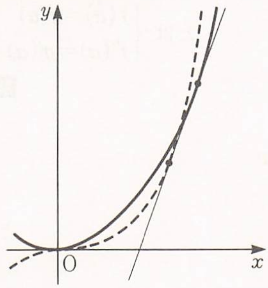
$$x^3-2x-b-(-x^2+ax)=(x-1)^2(x-m)$$

が恒等的に成り立つ条件 (両辺の係数が等しい) を考える.

B. 410

2曲線 $y=x^3$ と $y=x^2$ の両方に接する直線(共通接線)をすべて求めよ。

アプローチ 一方の $x=\alpha$ なる点での接線が他方とどこかで接すると考えます。



解答　$y=x^3$ 上の点$(\alpha,\ \alpha^3)$での接線は，

$y'=3x^2$ より，$y-\alpha^3=3\alpha^2(x-\alpha)$

$\therefore\quad y=3\alpha^2x-2\alpha^3$　………　①

直線①が放物線 $y=x^2$ と接するのは，両者からyを消去したxの2次方程式

$$x^2-3\alpha^2x+2\alpha^3=0$$

が重解をもつ，つまり

$$\text{判別式}=(3\alpha^2)^2-4\cdot2\alpha^3=0$$

$\therefore\quad \alpha=0$ または $\alpha=\dfrac{8}{9}$　………　②

のときである。

◁ 判別式
☞ 大学への数学 I ニューアプローチ，A1.6 p.13

よって，求める共通接線は2本あり，その方程式は②の値を①に代入することにより，

$$\boldsymbol{y=0}\ \text{と}\ \boldsymbol{y=\frac{64}{27}x-\frac{1024}{729}}$$

となる。

[注] 1°　$y=x^2$ 上の点$(\beta,\ \beta^2)$での接線

$y=2\beta x-\beta^2$　………　③

と①とが一致するとき，それが共通接線になることを利用する手もある。つまり，①，③が一致する条件は

$$3\alpha^2=2\beta\ \text{かつ}\ 2\alpha^3=\beta^2$$

2°　上の解答とは逆に，直線③が曲線 $y=x^3$ と接すると考えると，$x^3-2\beta x+\beta^2=0$ が(実数の)重解をもつ条件を求めることになるが，3次方程式なので得策でない。

3°　共通接線を $y=mx+n$ とおき，各曲線と連立して得られるxの方程式がそれぞれ重解をもつべきことから

$$\begin{cases} x^3-mx-n=(x-\alpha)^2(x-\gamma) \\ x^2-mx-n=(x-\beta)^2 \end{cases}$$

が恒等的に成立する条件を考える(☞ B. 409[注])ことも可能だが，これもやはり得策ではない。

B. 411

xy 平面上で直線 $y=t^2(x-t)$ が t の値によらず定曲線 $y=px^3$ に接するという．p の値を求めよ．

アプローチ　一般に，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $x=\alpha$ なる点で接するとは $\begin{cases} f(\alpha)=g(\alpha) \\ f'(\alpha)=g'(\alpha) \end{cases}$ となることです．

解答　$\begin{cases} f(x)=t^2(x-t) \\ g(x)=px^3 \end{cases}$ とおくと

$$\begin{cases} f'(x)=t^2 \\ g'(x)=3px^2 \end{cases}$$

となる．さて，いま

'$y=f(x)$ と $y=g(x)$ が接する'

$\Longleftrightarrow$ '$f(\alpha)=g(\alpha)$ かつ $f'(\alpha)=g'(\alpha)$ を満たす実数 α が存在する'

であるから，どんな t に対しても α をうまく選べば

$$\begin{cases} t^2(\alpha-t)=p\alpha^3 & \cdots\cdots\cdots ① \\ t^2=3p\alpha^2 & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

が成り立つような p の条件を求めればよい．

①×3−②×α より　$t^2(2\alpha-3t)=0$　………③

である．$t\neq 0$ のときは，α は，

$$\alpha=\frac{3}{2}t \quad \cdots\cdots\cdots ③'$$

と選ばなければならない．これが①を満たすための条件から

②と③を満たすものは，①を満たす．

$$t^2\left(\frac{27}{4}p-1\right)=0 \quad \therefore \quad p=\frac{4}{27}$$

逆に曲線 $y=\frac{4}{27}x^3$ は，$x=\alpha$ すなわち $x=\frac{3}{2}t$ なる点で直線 $y=t^2(x-t)$ に接する．

よって求めるPの値は $\mathbf{P=\frac{4}{27}}$

研究　$y=\frac{4}{27}x^3$ は直線群 $y=t^2(x-t)$ の包絡線と呼ばれるものです．直線群の通過範囲を調べてみると接する様子がよくわかります．

B. 412

曲線 $C: y=x^3-px+q$ 上の1点Pにおける接線 l が，C とP以外の点Qで交わるとする．そのような接線 l のうちで，Qにおける C の接線と直交するものが存在するための p，q の条件を求めよ．

アプローチ 点Pの x 座標を $x=t$ とおくと，B.407(2)と同様にして，点Qの x 座標が t で表せます．そこで，直交条件は…….

解答 $y=x^3-px+q$ ……… ①

$y=f(x)$ とおくと，$f'(x)=3x^2-p$ となるので，点 $P(t,\ t^3-pt+q)$ での①の接線は

$y-(t^3-pt+q)=(3t^2-p)(x-t)$

$\therefore\ y=(3t^2-p)x-2t^3+q$ ……… ②

となる．①，②から y を消去すると，

$x^3-3t^2x+2t^3=0$

$\therefore\ (x-t)^2(x+2t)=0$

◀①,②は $x=t$ なる点で接しているので $(x-t)^2$ を因数にもつ．

となるので，点Qの x 座標は $x=-2t$

よって，Pでの接線 l がQでの接線と直交するのは $f'(t)\cdot f'(-2t)=-1$

$\therefore\ (3t^2-p)(12t^2-p)=-1$

$\therefore\ 36t^4-15pt^2+p^2+1=0$ ……… ③

が成り立つときである．

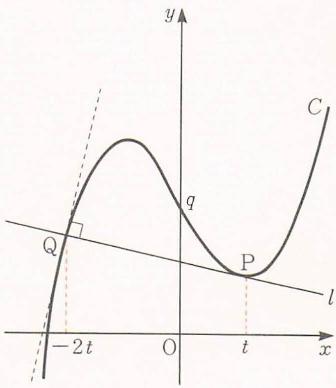
したがって，③を満たす実数値 t が存在するような，いいかえれば，

$t^2=u$ ……… ④

とおいた u の2次方程式

$36u^2-15pu+p^2+1=0$ ……… ⑤

が，$u\geqq 0$ なる解を少なくとも1つもつような p，q の条件が求めるものとなる．



⑤の2解の積 $=\dfrac{p^2+1}{36}>0$ より，求める条件は，⑤が正の2実数解をもつことであるので，

◀⑤が異符号の解や，$u=0$ を解にもつことはない．

$$\begin{cases} \text{判別式}=(15p)^2-4\cdot 36(p^2+1)\geqq 0 \\ 2\text{解の和}=\dfrac{15p}{36}>0 \end{cases}$$

◀解と係数の関係 ☞ 大学への数学I ニューアプローチ，A1.7 p.14

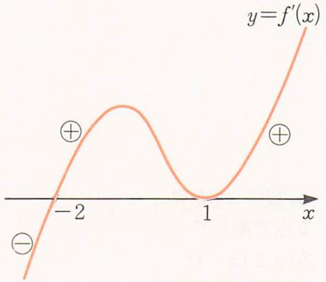
$\therefore\ p\geqq\dfrac{4}{3}.$

B.413

(1)　$f(x)=x^4-6x^2+8x-3$ の極値を求めよ．

(2)　$f(x)=x^3-7x^2-4x+5$ の極大値を求めよ．

アプローチ　整関数 $f(x)$ が $x=\alpha$ で極値をとるために $f'(\alpha)=0$ は必要条件にすぎません．極値を見つけるために本質的なのは“$f'(x)$ の符号変化”です．



解答　(1)　$f'(x)=4x^3-12x+8$

$$=4(x-1)^2(x+2)$$

$(x-1)^2 \geqq 0$ であるので，

$x \neq 1$ においては，$f'(x)$ は $x+2$ と同符号となり，$f(x)$ の増減表は下のようになる．

x		-2		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗		↗

これより，$\begin{cases} \textbf{極大値：なし} \\ \textbf{極小値}=f(-2)=-27 \end{cases}$

を得る．

(2)　$f'(x)=3x^2-14x-4$

$$=3\left(x-\frac{7-\sqrt{61}}{3}\right)\left(x-\frac{7+\sqrt{61}}{3}\right)$$

より，$f(x)$ の増減は下のようになる．

x		α		β	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

$$\left(\alpha=\frac{7-\sqrt{61}}{3},\ \beta=\frac{7+\sqrt{61}}{3}\right)$$

これより，極大値$=f(\alpha)$ となる．

ところで，

$$f(x)=(3x^2-14x-4)\left(\frac{1}{3}x-\frac{7}{9}\right)-\frac{122}{9}x+\frac{17}{9}$$

であるので，

$$f(\alpha)=-\frac{122}{9}\alpha+\frac{17}{9}=\boldsymbol{\frac{-803+122\sqrt{61}}{27}}$$

となる．

$f(x)$ を $f'(x)$ で割った．$f'(\alpha)=0$ ゆえこれを用いると $f(\alpha)$ の値を求めるのが楽になる．

B. 414

$f(x)=|x^3-3x|+3x$ とする。

(1) $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(2) $f(x)$ の極大値，極小値をすべて求めよ。

アプローチ まず，絶対値をはずさないと，コトが始まりません。

解答 (1) i) $x^3-3x>0$ のとき，すなわち，

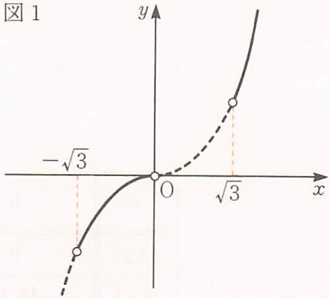
$-\sqrt{3}<x<0$ または $\sqrt{3}<x$ においては

$$f(x)=(x^3-3x)+3x=x^3$$

$$\therefore\ f'(x)=3x^2$$

であるので，グラフは図1のようになる。

図1



ii) $x^3-3x<0$ のとき，すなわち，

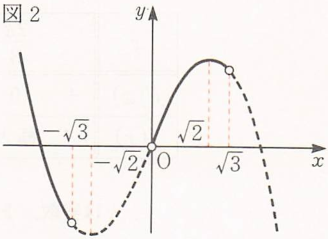
$x<-\sqrt{3}$ または $0<x<\sqrt{3}$ においては

$$f(x)=-(x^3-3x)+3x=-x^3+6x$$

$$\therefore\ f'(x)=-3x^2+6=-3(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$$

であるので，グラフは図2のようになる。

図2



iii) $x^3-3x=0$ のとき，すなわち，

$x=-\sqrt{3}$ または 0 または $\sqrt{3}$ においては，i)，ii)のグラフはつながる。

以上より，$y=f(x)$ のグラフは図3のようになる。

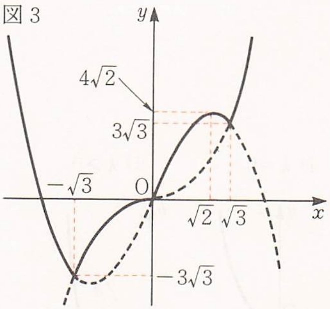
(2) $y=f(x)$ のグラフを参照することにより

$$\textbf{極大値}=f(\sqrt{2})=4\sqrt{2}$$

$$\textbf{極小値}=f(\pm\sqrt{3})=\pm 3\sqrt{3}$$

が分かる。

図3



[注] $f(x)=\begin{cases} x^3 & (x^3-3x\geqq 0 \text{ のとき}) \\ -x^3+6x & (x^3-3x\leqq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$

だからといって，

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & (x^3-3x\geqq 0 \text{ のとき}) \\ -3x^2+6 & (x^3-3x\leqq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とすることはできない。$x=0$，$\pm\sqrt{3}$ のときに $f'(x)$ が存在するかどうかが分からないからである。また，$f(0)$ が極値でないことは極値の定義（☞ A. 4.9）に戻れば明らかとなる。

B. 415

$f(x)=x^3-kx^2$ は極大値 4 をもつという．
定数 k の値を定めよ．

アプローチ $f'(x)$ の符号変化を調べることにより，$f(x)$ が極大になる x の値を見つけます．

解答 $f(x)=x^3-kx^2$ より

$$f'(x)=3x^2-2kx=3x\left(x-\frac{2k}{3}\right)$$

i）$k=0$ のとき，$f'(x)=3x^2\geqq 0$ より，$f(x)=x^3$ は単調増加となり極値をとらないので不適．

x		0		$\frac{2k}{3}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘		↗

x		$\frac{2k}{3}$		0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘		↗

ii）$k>0$ のとき，増減表は左のようになるので，$f(x)$ は $x=0$ で

極大値 $=f(0)=0$　$(\neq 4)$

をとるので適さない．

iii）$k<0$ のとき，ii）とは逆に $f(x)$ は $x=2k/3$ で

極大値 $=f\left(\dfrac{2k}{3}\right)=-\dfrac{4}{27}k^3$

をとる．

よって，極大値 $=4$ となるのは

k は実数．▶　$-\dfrac{4}{27}k^3=4$　∴　$k^3=-27$　∴　$k=-3$

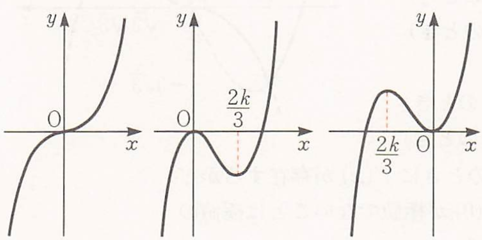
のときであり，これは $k<0$ に適している．

ゆえに，求める k の値は

$k=-3$

である．

i）$k=0$　　ii）$k>0$　　iii）$k<0$



［注］$f(x)$ は"x^3 の係数 >0"の 3 次関数であるから，極値をもつのは，「$f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつ」…①　のときで，極大となる x は「$f'(x)=0$ の小さい方の解」…回であることを既知として解答してもよい．この場合，①の条件は $k\neq 0$ であり，回からは，極大を与える x の値

$$x=\begin{cases}0 & \cdots\cdots\ k>0\\ 2k/3 & \cdots\cdots\ k<0\end{cases}$$ が導かれる．

B. 416

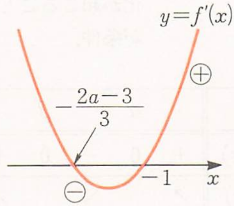
$f(x)=x^3+ax^2+bx$ が，$x=-1$ で極小値をとるような実定数 a, b の条件を求め，この条件を満たす点 (a, b) の存在範囲を ab 平面に図示せよ．

アプローチ　$f(x)$ が微分可能であっても，$f'(-1)=0$ となることは，$f(x)$ が $x=-1$ で極小値をとるための必要条件にすぎません．

解答　$f'(x)=3x^2+2ax+b$ より，
3次関数 $f(x)$ が $x=-1$ で極小値をとるためには，

$f'(-1)=3-2a+b=0$　∴　$b=2a-3$ ………①

が必要である．



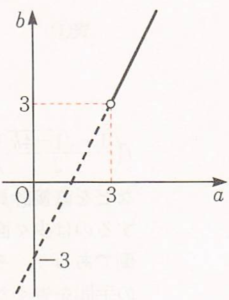
①を用いて $f'(x)$ から b を消去すると，

$f'(x)=3x^2+2ax+(2a-3)=(x+1)(3x+2a-3)$

さて，$f(x)$ が $x=-1$ で極小値をとるためには，$x=-1$ の前後で $f'(x)$ の符号が負から正へ変わることが必要十分で，その条件は，$f'(x)=0$ となる x の値に注目して，$-\dfrac{2a-3}{3}<-1$　∴　$a>3$ ……②

となることである．

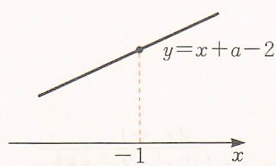
よって，a, b の満たすべき条件は①かつ②であり，ab 平面に図示して右図のような半直線を得る．



[注] 1°　①の下では，$F(x)=f(x)-f(-1)$ について $F(-1)=F'(-1)=0$ が成立することに注目して，次のように②を導くこともできる．

別解　①のもとで，

$$f(x)-f(-1)=x^3+ax^2+(2a-3)x-(-a+2)$$
$$=(x+1)^2(x+a-2).$$



ところで，$f(x)$ が $x=-1$ で極小値をとるということは $x=-1$ の十分近く $(x\neq-1)$ で，$f(x)>f(-1)$ となることである．そこで，$x=-1$ の十分近く $(x\neq-1)$ で，$x+a-2>0$ となるための条件を求めればよい．よって，$(-1)+a-2>0$　∴　$a>3$

2°　"数学III"を知るなら，$f(x)$ が $x=\alpha$ で2回微分できる場合 "$f''(\alpha)\neq0$ なら，$f(\alpha)$ が極小値 $\Longleftrightarrow$ $f'(\alpha)=0$ かつ $f''(\alpha)>0$" という関係を利用して解くこともできる．

B. 417

$f(x)=2x^3-3x^2+6kx$ が極大値と極小値をもち，その差が 8 であるという．実数 k の値を定めよ．

アプローチ 計算の工夫が解答のポイントです．

解答 $f'(x)=6(x^2-x+k)$

$f'(x)$ に符号変化が起こることが条件．

まず，$f(x)$ が極値をもつためには，方程式

$$x^2-x+k=0 \quad \cdots\cdots ①$$

が異なる 2 つの実数解をもつこと，つまり，

$$\text{判別式}=1-4k>0 \quad \cdots\cdots ②$$

が必要である．

このとき，①の実数解を $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，

$$\alpha=\frac{1-\sqrt{1-4k}}{2},\ \beta=\frac{1+\sqrt{1-4k}}{2} \quad \cdots\cdots ③$$

x		α		β	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

表①

であり，また，$f(x)$ の

$$\text{極大値}=f(\alpha),\ \text{極小値}=f(\beta)$$

である．ところで，

$f\left(\dfrac{1-\sqrt{1-4k}}{2}\right)$ などを直接計算するのは少々面倒であろう．その手間を省くために，$f(\alpha)-f(\beta)$ が α と β の交代式であることを利用しようとしている．

$$\begin{aligned}f(\alpha)-f(\beta)&=2(\alpha^3-\beta^3)-3(\alpha^2-\beta^2)+6k(\alpha-\beta)\\&=(\alpha-\beta)\{2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-3(\alpha+\beta)+6k\}\\&=(\alpha-\beta)\{2(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+6k\}\end{aligned}$$

であり，これに，$\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=k$ および③を代入すると，

$$\begin{aligned}f(\alpha)-f(\beta)&=-\sqrt{1-4k}\{2\cdot1^2-2k-3\cdot1+6k\}\\&=\sqrt{1-4k}(1-4k)=(\sqrt{1-4k})^3.\end{aligned}$$

よって，$f(\alpha)-f(\beta)=8$ となるのは

$$(\sqrt{1-4k})^3=8 \quad \therefore \quad \sqrt{1-4k}=2 \quad \cdots\cdots ④$$

が成り立つときである．よって，②かつ④ から

$$1-4k=4 \qquad \therefore \quad k=-\mathbf{\frac{3}{4}}.$$

［注］ $f(\alpha)$，$f(\beta)$ を計算するには，α，β が，①の解であることに注目して，$f(x)$ を x^2-x+k で割ったときの余りを求め，

$$f(x)=(2x-1)(x^2-x+k)+(4k-1)x+k$$

に $x=\alpha,\ \beta$ を代入して，

$$\begin{cases}f(\alpha)=(4k-1)\alpha+k\\f(\beta)=(4k-1)\beta+k\end{cases}$$ とするのもうまい．

$$\begin{array}{r}2x\quad-1\\ x^2-x+k\,\big)\,\overline{2x^3-3x^2+6kx}\\ \underline{2x^3-2x^2+2kx}\\ -\ x^2+4kx\\ \underline{-\ x^2+\ \ x-k}\\ (4k-1)x+k\end{array}$$

B. 418

関数 $f(x)=x^3-3kx^2+3x-2$ について，

(1)　極値をもたないような実数 k の値の範囲を求めよ．

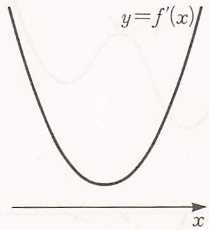
(2)　$x>0$ の範囲に極値をもたないような実数 k の値の範囲を求めよ．

アプローチ　$f(x)$ が極値をもたないための条件は，$f'(x)$ に符号変化が起こらないことです．

解答　$f'(x)=3x^2-6kx+3$

$=3(x^2-2kx+1)$

より，関数 $y=f'(x)$ のグラフは，下に凸な放物線である．



(1)　$f(x)$ が極値をもたないためには，

$f'(x)$ に符号変化が起こらない

ことが必要十分である．そのための条件は，

任意の実数 x について　$f'(x)\geqq 0$

となること，したがって，　　$k^2-1\leqq 0$

から，　$\boldsymbol{-1\leqq k\leqq 1}$ となる．

(2)　$f(x)$ が $x>0$ の範囲に極値をもたないためには，

$x>0$ の範囲で $f'(x)$ に符号変化が起こらないことが必要十分である．そのための条件は，

$x>0$ の範囲で，つねに $f'(x)\geqq 0$　………(＊)

となることである．

そこで，$y=f'(x)=3(x-k)^2+3(1-k^2)$

のグラフの対称軸：$x=l$ の位置で分類する．

i)　$k>0$　……… ①　　のとき，

$f'(x)$ は $x=k$ で最小となるから

(＊)$\Longleftrightarrow f'(k)=3(1-k^2)\geqq 0$　……… ②

ii)　$k\leqq 0$　……… ③　　のとき，

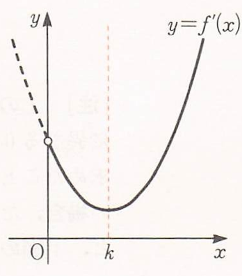
$f'(x)$ は $x>0$ で増加し，$f'(0)=3\geqq 0$ より，(＊)は成立する．

よって，求める k の値の範囲は

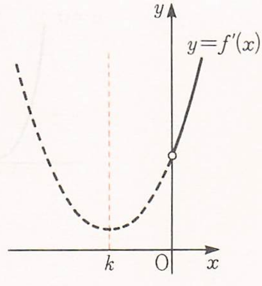
(①かつ②) または③から，

$\boldsymbol{k\leqq 1}$　となる．

i)



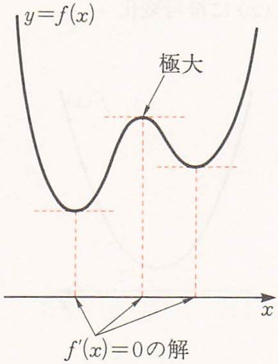
ii)



B. 419

$f(x)=x^4-2x^3+ax^2$ が極大値をもつような実数 a の値の範囲を求めよ．

アプローチ 4次関数のグラフは「指導要領」では数学IIの範囲外ですが，重要話題です．ジックリ勉強しましょう．



解答 $f(x)$ は "x^4 の係数>0" の4次関数であるから，"$f(x)$ が極大値をもつ"…… Ⓐ ことは，"4次曲線 $y=f(x)$ が2つの極小点と1つの極大点をもつ" ことと同値であり，したがって，また，"3次方程式 $f'(x)=0$ が異なる3つの実数解をもつ" …… Ⓐ′ ことと同値である．ところで，

$$f'(x)=4x^3-6x^2+2ax=2x(2x^2-3x+a)$$

であるので，Ⓐ′は，

2次方程式 $2x^2-3x+a=0$ が0以外の異なる2つの実数解をもつ

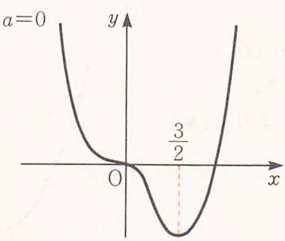
ことと同値である．

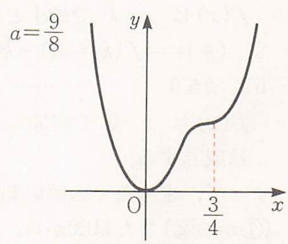
よって，求める a の値の範囲は

$$\begin{cases} \text{判別式}=3^2-4\cdot 2\cdot a>0 \\ 2\cdot 0^2-3\cdot 0+a\neq 0 \end{cases}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a<\frac{9}{8}}\ \text{かつ}\ \boldsymbol{a\neq 0}\quad \text{である．}$$

［注］ 上の解答では，$f'(x)$ が $f'(x)=4x(x-\alpha)(x-\beta)$ (α，β は互いに異なる0でない実数 ………(＊)) と因数分解されるための条件を求めたことになる．ここで条件(＊)は重要で，もし(＊)が成りたたない場合，たとえば，$\alpha=0$ ($a=0$) とか $\alpha=\beta$ ($a=9/8$) の場合を考えると，下図のようになり，いずれも極大値をもたない．





B. 420

関数 $f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x+3$ について，次の定義域における最大値，最小値を求めよ．

(1)　$-1 \leqq x \leqq 2$

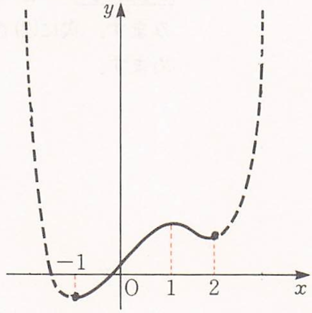
(2)　$-2 \leqq x < 3$

アプローチ　まず，$f'(x)$ を因数分解して，増減表をかきます．

解答　$f'(x)=12x^3-24x^2-12x+24$

$=12(x^3-2x^2-x+2)$

$=12(x+1)(x-1)(x-2)$



(1)　$f(x)$ の増減表は，下のようになる．

x	-1		1		2
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	-16	↗	16	↘	11

これより，最大値$=f(1)=$**16**

また，最小値は $f(-1)=-16$ と $f(2)=11$ のうち，小さい方なので

最小値$=f(-1)=$**−16**

(2)　$-2 \leqq x < 3$ の範囲における $f(x)$ の増減は下のようになる．

x	-2		-1		1		2		(3)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	43	↘	-16	↗	16	↘	11	↗	(48)

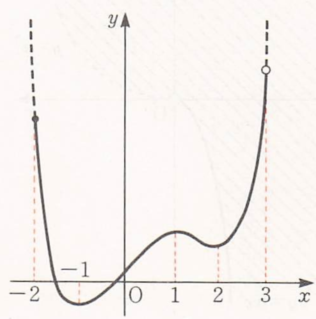
◀必要な $f(x)$ の値を計算して表の中に記入してある．

これより，最小値$=f(-1)=$**−16** であるが
$-2 \leqq x < 3$ の範囲において，

$$f(x) < f(3)=48$$

であり，変域内で x が 3 に近づけば，$f(x)$ の値はいくらでも 48 に近づくことができるので

最大値はない．



[注]「定義域全体にわたって関数値を調べる」ことが大切である．また，特に(2)などは，増減表だけから“最大値はない”ということを判断しにくいので，グラフを描けばよい．

B.421

$t>0$ を定数，$f(x)=x^3+3t^2x+t^3$ とする．

(1)　$x=1$ のとき，右辺を t の関数とみなして $g(t)$ とおく．関数 $g(t)$ $(t>0)$ の値域を求めよ．

(2)　t が $t>0$ の範囲で変化する時 $y=f(x)$ のグラフが通過する領域を xy 平面上に図示せよ．

アプローチ　(1)ではまず x をある特定の値 $(x=1)$ に固定して調べてみます．次に(2)で x を動かすことによってグラフの通過する領域を求めます．

解答　**(1)**　$x=1$ のとき

$g(t)=t^3+3t^2+1$　………①

①の両辺を t で微分すると

$g'(t)=3t^2+6t=3t(t+2)$

であるから，$y=g(t)$ の増減表は下のようになる．

t		-2		0	
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	↗	5	↘	1	↗

したがって，求める値域は $\boldsymbol{y>1}$ である．

(2)　$f(t)=t^3+3xt^2+x^3$ を t で微分すると

$f'(t)=3t^2+6xt=3t(t+2x)$　………①

であるから，次のように x の値で場合分けする．

i）　$x>0$ の場合

②より $y=g(t)$ は $t=-2x$ で極大値 $f(-2x)=5x^3$．$t=0$ で極小値 $f(0)=x^3$ をとる．したがって，求める値域は $y>x^3$

ii）　$x=0$ の場合

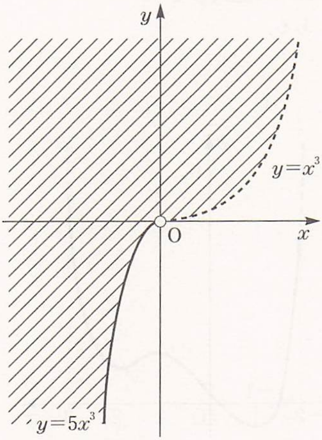
②より $f'(t)=3t^2$ であるから，求める値域は $y>g(0)=0$

iii）　$x<0$ の場合

②より $y=g(t)$ は $t=0$ で極大値 $f(0)=x^3$．$t=-2x$ で極小値 $f(-2x)=5x^3$ をとる．

したがって，求める値域は $y\geqq f(-2x)=5x^3$

以上を図示すると左のようになる．



B. 422

k を正の定数とするとき，$0 \leqq x \leqq 4$ における $f(x)=x(x-3k)^2$ の最大値を求めよ．

アプローチ まず，$y=f(x)$ のグラフを描きます．

解答 $f'(x)=(x-3k)^2+x\cdot 2(x-3k)$
$=3(x-k)(x-3k)$

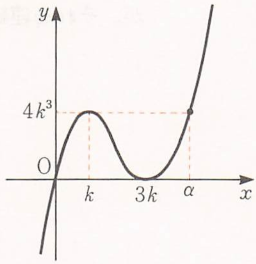
◀積の微分法

$k>0$ より，$k<3k$ なので

極大値$=f(k)=4k^3$

極小値$=f(3k)=0$

となり，$y=f(x)$ のグラフは右のようになる．



図のように，$x>3k$ において，$f(x)=f(k)=4k^3$ となる x の値を α とおけば，α は

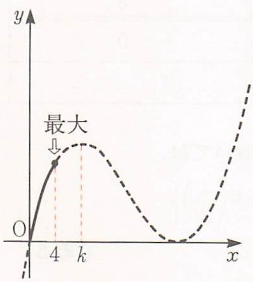
$x(x-3k)^2=4k^3$, つまり $(x-k)^2(x-4k)=0$

の $x>3k$ を満たす解であるから，$\alpha=4k$ となる．

そこで，変域の右端の $x=4$ と k および $4k$ との大小で分類すると，次のそれぞれの $0 \leqq x \leqq 4$ の範囲における $y=f(x)$ のグラフを得る．

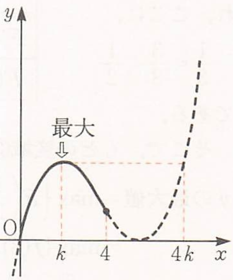
◀$y=f(x)$ のグラフは固定しておいて $x=4$ を動かしてゆく．

i) $4 \leqq k$



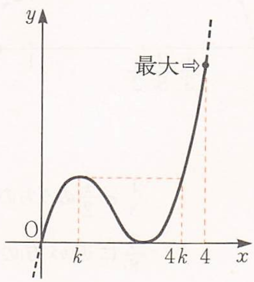
最大値$=f(4)$

ii) $k \leqq 4 \leqq 4k$



最大値$=f(k)$

iii) $4k \leqq 4$



最大値$=f(4)$

以上より，$f(x)$ の最大値は，

$0<k \leqq 1$ または $k \geqq 4$ のとき，

$\boldsymbol{f(4)=4(4-3k)^2}$

$1 \leqq k \leqq 4$ のとき，

$\boldsymbol{f(k)=4k^3}$

である．

B.423

$n=1, 2, 3, \cdots\cdots$ のとき，n の関数

$y=f(n)=\dfrac{1}{n}\left(3-\dfrac{2}{n}\right)^3$ の最大値を求めよ．

アプローチ $x=1/n$ とおけば y は x の整式で表されます．すると，x は $x=1, 1/2, 1/3, \cdots\cdots$ という離散的な値をとる変数になりますが，それを連続的な値をとる変数とみなして議論を進めます．

解答 $\dfrac{1}{n}=x$ とおくと，

$$y=x(3-2x)^3\equiv F(x) \quad \cdots\cdots ①$$

となり，x の変域は

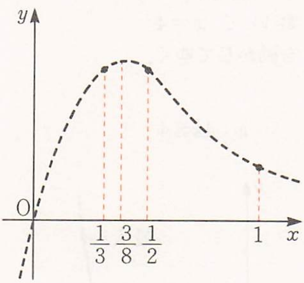
$$「x=1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots\cdots」 \quad \cdots\cdots ②$$

となる．いま，x を

$$0<x\leqq 1 \quad \cdots\cdots ③$$

の範囲の連続的な値をとる変数と考えれば，

$$F'(x)=(3-2x)^3+x\cdot 3(3-2x)^2\cdot(-2)$$
$$=(3-2x)^2(3-8x)$$



より，右のような増減表が得られ，ここに，

$$\frac{1}{3}<\frac{3}{8}<\frac{1}{2}$$

である．

x	(0)		$\frac{3}{8}$		1
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$		↗		↘	

そこで，もとの変域②においては，

$\dfrac{1}{3}$ と $\dfrac{1}{2}$ のうちの $\dfrac{3}{8}$ に近い方の x の値で最大になるというのは誤った推論．

$$y\text{の最大値}=\max\left\{F\left(\frac{1}{3}\right),\ F\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$$
$$=\max\{f(3),\ f(2)\} \quad \text{である．}$$

ここに，$f(3)=\dfrac{7^3}{3^4}=\dfrac{343}{81}>\dfrac{324}{81}=4=f(2)$ だから，

求める y の 最大値$=f(3)=\mathbf{\dfrac{343}{81}}$ である．

［注］ この種の問題には，$f(n+1)-f(n)$ の正負や $\dfrac{f(n+1)}{f(n)}$ と 1 の大小を見て，直接 n の変化に応ずる $f(n)$ の増減を調べるという解法もあり得るが，本問の場合にはあまり適当でない．

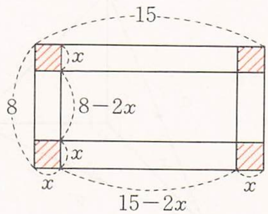
B.424

横 15 cm，縦 8 cm の長方形のボール紙の 4 隅から，同じ大きさの正方形を切り取って箱を作るとき，この箱の容積を最大にするには，切り取る正方形の 1 辺の長さをいくらにすればよいか．

アプローチ　図形に関する最大・最小の基本問題です．切り取る正方形の 1 辺の長さを x cm とおいて，箱の容積を x の関数として表しますが，この際，図形的な意味から定まる．“x の変域” を明示しておくことが大切です．

解答　切り取る正方形の 1 辺の長さを x(cm) とすると，箱の縦，横，高さはそれぞれ

$$8-2x,\ 15-2x,\ x\quad\text{(cm)}$$



となるので箱の容積 V(cm^3) は，

$$V=(8-2x)(15-2x)x$$
$$=2(2x^3-23x^2+60x) \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

となる．

また，x の変域は，“縦，横，高さが正” より，

$$8-2x>0 \text{ かつ } 15-2x>0 \text{ かつ } x>0$$
$$\therefore\quad 0<x<4 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

である．①より

◀変域は，“図に現われる長さがすべて正” という条件から定まる．

$$\frac{dV}{dx}=4(3x^2-23x+30)=4(3x-5)(x-6)$$

x	(0)		$\frac{5}{3}$		(4)
V'		+	0	−	
V		↗		↘	

これから，増減は左の表のようになり，

$$x=\frac{5}{3} \quad \cdots ③$$

◀増減表には，変域の両端も記入して，変域内だけで調べる．

のとき V は最大となることがわかる．

よって，1 辺の長さを $\mathbf{\frac{5}{3}}$ **cm** にすればよい．

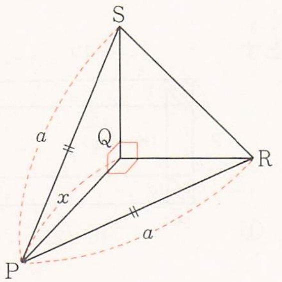
［注］　x の変域②を押えることと，最大を与える x の値③が変域内にあることを確認することが本質的に大切なことである．

B.425

(1)　四面体PQRSが ∠PQR＝∠RQS＝∠SQP＝90° および PR＝PS＝a（定数）を満たすとき，このような四面体の体積の最大値を求めよ．

(2)　四面体ABCDが，AB＝BC＝CD＝DA＝a（定数）を満たすとき，このような四面体の体積の最大値を求めよ．

アプローチ　(1)で注意すべきことは前問B.424と同様です．(2)は(1)の利用．



解答　**(1)**　PQ＝x とおくと，x の変域は

$0<x<a$　………①

であり，△PQR≡△PQS より，

QR＝QS＝$\sqrt{a^2-x^2}$ となる．

よって，四面体の体積Vは

$$V=\frac{1}{3}\triangle \mathrm{PQR}\cdot\mathrm{QS}$$

$$=\frac{1}{6}x(a^2-x^2)$$

となる．

$$\frac{dV}{dx}=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)\left(x+\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$$

より，①の範囲におけるVの増減は左のようになり，これより，$x=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ のときにVは

x	0		$\frac{a}{\sqrt{3}}$		a
$\frac{dV}{dx}$		＋	0	－	
V		↗		↘	

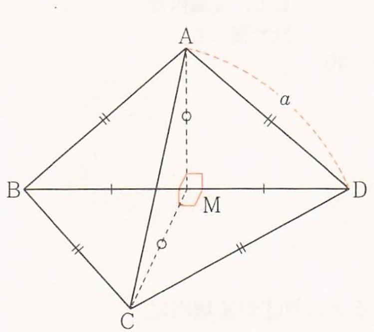
最大値＝$\dfrac{\sqrt{3}}{27}a^3$　をとる．

(2)　BDの中点をMとすると，

∠AMD＝∠CMD＝90° である．

いま，BDを固定すると，体積が最大となるのは，2面ABD，BCDが垂直，つまり，∠AMC＝90° のときである．

このとき，四面体ABCDの体積は，四面体DMCAの体積の2倍となり，四面体DMCAの体積の最大値は，(1)で求めているので，その2倍として，



最大値＝$\dfrac{2\sqrt{3}}{27}a^3$　を得る．

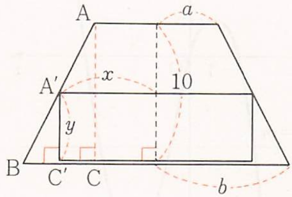
B.426

高さ 10 cm，上底の半径 a cm，下底の半径 b cm ($a<b$) の直円錐台がある．この円錐台の中に半径 x cm の直円柱を内接させる．ただし，円柱の軸は円錐台の軸に一致し，円柱の下底は円錐台の下底面上にあり，円柱の上底は円錐台の上底または側面に接するものとする．

x が 0 から b まで変わるとき，直円柱の体積 V (cm^3) が最大となる x の値を求めよ．

解答 $0<x<a$ のときよりも $x=a$ のときの方が体積 V が大きいことは明らかであるから，V の最大を調べるには　変域：$a\leqq x<b$　……… ①

について考えればよい．



右の，軸を含む断面図において，円柱の高さを，$\mathrm{A'C'}=y$ (cm) とすると，$y:10=b-x:b-a$ より，

$$y=\frac{10}{b-a}(b-x)$$

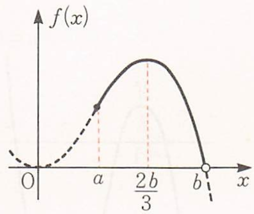
となるので，円柱の体積は

$$V=\pi x^2 y=\frac{10\pi}{b-a}x^2(b-x)$$

ここに，$10\pi/(b-a)$ は正の定数だから，①の範囲で，$f(x)=x^2(b-x)$ を最大にする x の値を調べる．

$$f'(x)=2bx-3x^2=3x\left(\frac{2b}{3}-x\right)$$

より，$2b/3$ が変域①内か否かで分類する．



i) $a<\dfrac{2b}{3}$ のとき，

右の増減表より，

$x=\dfrac{2b}{3}$ で最大．

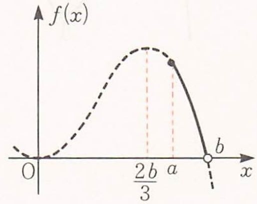
x	a		$\frac{2b}{3}$		(b)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

ii) $\dfrac{2b}{3}\leqq a$ のとき，

右の増減表より，

$x=a$ で最大．

x	a		(b)
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$		↘	



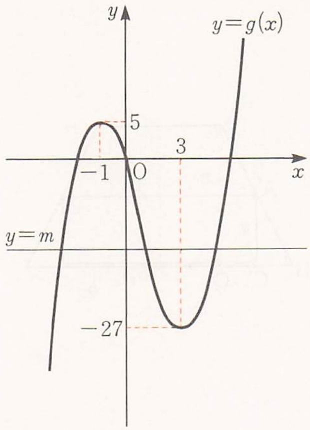
以上まとめて，

V が最大になる $x=\begin{cases} \boldsymbol{2b/3} \cdots\cdots \boldsymbol{a<2b/3} \text{ のとき} \\ \boldsymbol{a} \quad\ \cdots\cdots \boldsymbol{a\geqq 2b/3} \text{ のとき}\end{cases}$ である．

B.427

$f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3-\frac{9}{2}x^2$ とする．曲線 $C：y=f(x)$ 上の相異なる点における接線の傾きが同じ値mになるという．このような相異なる点がとれるmの値の範囲を求めよ．

アプローチ xの方程式 $f'(x)=m$ が異なる実数解をもつような条件を考えます．



解答 $f'(x)=x^3-3x^2-9x$ より，

$$x^3-3x^2-9x=m \quad \cdots\cdots ①$$

が異なる実数解をもつようなmの値の範囲が求めるものである．

そこで，①の左辺を $g(x)$ とおき，

曲線 $y=g(x)$ と直線 $y=m$

が2個以上の共有点をもつような条件を考える．

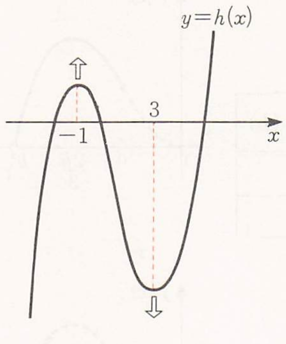
$$g'(x)=3x^2-6x-9$$
$$=3(x-3)(x+1)$$

より，$y=g(x)$ のグラフは左のようになる．

よって，求めるmの値の範囲は

$$\boldsymbol{-27 \leqq m \leqq 5}$$

である．



［注］1° 3次方程式①が異なる実数解をもつ条件は，関数

$$h(x)=x^3-3x^2-9x-m$$

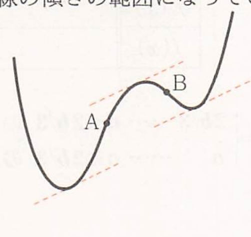
の，極大値≧0 かつ 極小値≦0

$\therefore$ (極大値)・(極小値)≦0

$\therefore$ $h(-1)\cdot h(3)\leqq 0$

なる条件からも得られる．（☞ B.429）

2° 数学IIIの知識を必要とするが，上で求めたmの範囲は，変曲点A，Bを端点とする弧AB上の接線の傾きの範囲になっている．



B.428

曲線 $y=f(x)=x^3-3x^2+2x+1$ について

(1) $y=x+n$ が $y=f(x)$ と異なる3点で交わるような n の条件を求めよ．

(2) 曲線 $y=f(x)$ 上に異なる3点A，B，Cを同一直線上にならぶようにとる．このとき，3点A，B，Cを通る直線の傾きmのとりうる範囲を求めよ．

アプローチ (1) x に関する方程式が，異なる3個の実数解を持つ条件を求める問題に帰着します．まず，その方程式を作りましょう．

解答 (1) $y=x^3-3x^2+2x+1$ と $y=x+n$ より y を消去すると

$$x^3-3x^2+x+1=n \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで $g(x)=x^3-3x^2+x+1$ とおいて $y=g(x)$ の変化を調べる．$g'(x)=3x^2-6x+1$ であるから $y=g(x)$ の増減表は下のようになる．

x		α		β	
$g'(x)$	↗	0	↘	0	↗
$g(x)$		$g(\alpha)$		$g(\beta)$	

$\left(\alpha=\dfrac{3-\sqrt{6}}{3},\ \beta=\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}\right)$

したがって①のxの実数解を $y=g(x)$ と $y=n$ の交点のx座標と考えると，求めるnの条件は

$$\boldsymbol{g(\beta)=-\frac{4}{9}\sqrt{6}<n<\frac{4}{9}\sqrt{6}=g(\alpha)}$$

(2) 3点A，B，Cを通る直線はy軸に平行でないので $y=mx+n$ とおける．

$y=x^3-3x^2+2x+1$ に代入してyを消去すると

$$x^2-3x^2+(2-m)x+1=n \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

xの方程式②が異なる3つの実数解を持つようなnが存在するためのmの条件を求めればよい．これは $y=x^3-3x^2+(2-m)x+1$ が極大値と極小値を持つようなmの条件に他ならない．すなわち

$$f'(x)=3x^2-6x+(2-m)=0$$

が相異なる2つの実数解を持つことが必要十分であるので求めるmの範囲は $3^2-3(2-m)>0$

$$\therefore \quad \boldsymbol{m>-1}$$

B. 429

曲線 $y=x^3-3x$ に対してそこから相異なる3本の接線がひけるような点 $(a,\ b)$ の存在範囲を求め，それを ab 平面に図示せよ．

アプローチ 途中までは，B. 406 (2)で学んだ手筋です．

解答 $y'=3x^2-3$ より，曲線の $x=t$ における接線は，

$$y-(t^3-3t)=3(t^2-1)(x-t)$$

$$\therefore\quad y=3(t^2-1)x-2t^3$$

で表される．これが，点 $(a,\ b)$ を通るのは，

$$b=3(t^2-1)a-2t^3$$

$$\therefore\quad 2t^3-3at^2+3a+b=0 \qquad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$

が成り立つときである．

よって，

t の3次方程式①が，相異なる3実数解をもつ…②

ような $(a,\ b)$ の範囲が求めるものである．

①の左辺を，$f(t)$ とおくと，

$$f'(t)=6t^2-6at=6t(t-a)$$

②が成り立つためには，

$$\begin{cases} f(t) \text{ が2つの極値をもち，} \\ \text{極大値}>0 \text{ かつ 極小値}<0 \end{cases}$$

となることが必要十分である．

その条件は，

極値をもつ条件 $a\neq 0$ はこれに含まれる．

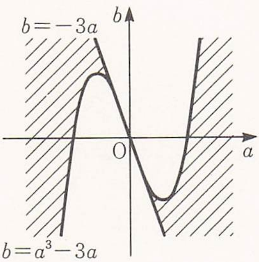
$$f(0)\cdot f(a)<0$$

$$\therefore\quad (b+3a)(b-a^3+3a)<0$$

である．

これを ab 平面に図示して，左図斜線部を得る．

ただし，境界は含まない．



［注］ 左図において，$b=-3a$ は $b=a^3-3a$ の原点での接線で，これらの境界線上の点からは，2本の接線が引け，白い部分の点からは，接線は1本だけ引ける．

B.430

1つの頂点に集まる3辺の長さの和が $\frac{9}{2}$ で，対角線の長さが $\sqrt{\frac{33}{4}}$ である直方体がある．この直方体の体積を V とするとき，V の最大値，および最小値を求めよ．

アプローチ　3辺の長さを x, y, z とおき，それらの間に成立する関係式の対称性に注目するのがうまいでしょう．

解答　1つの頂点に集まる辺の長さを x, y, z とおくと，

$$\begin{cases} x+y+z=\dfrac{9}{2} & \cdots\cdots\cdots ① \\ x^2+y^2+z^2=\dfrac{33}{4} & \cdots\cdots\cdots ② \\ xyz=V & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①のもとでは，②は

$$xy+yz+zx=6 \quad \cdots\cdots\cdots ②'$$

◀ $(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=\frac{33}{4}$
$\iff \left(\frac{9}{2}\right)^2-2(xy+yz+zx)=\frac{33}{4}$

と同値となるので，①，②，③つまり，①，②′，③を満たす x, y, z は，3次方程式

$$t^3-\frac{9}{2}t^2+6t-V=0 \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

の3つの解になる．したがって，V のとりうる値の範囲は，

◀ 3次方程式の解と係数の関係 ☞ 数学B

④が，$t>0$ の範囲に3つの実数解をもつ(重解を許す)　………　(＊)

ような V の範囲である．

④の左辺を $f(t)$ とおくと

$$f'(t)=3t^2-9t+6$$
$$=3(t-1)(t-2)$$

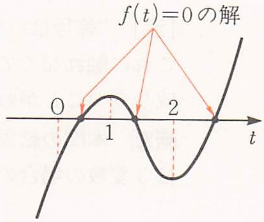
より，$f(t)$ の増減は右表のようになる．

t		1		2	
$f'(t)$	+	0	−	0	+
$f(t)$	↗		↘		↗

ゆえに，(＊)が成立するための条件：

$$\begin{cases} f(0)=-V<0 \\ f(1)=\dfrac{5}{2}-V\geqq 0 \\ f(2)=2-V\leqq 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad 2\leqq V\leqq \frac{5}{2}$$

から，V の最大値$=\mathbf{\frac{5}{2}}$，最小値$=\mathbf{2}$　を得る．



B.431

a，b は正の定数，x は $x>0$ の範囲の変数として，

$$f(x)=a^3+b^3+x^3-3abx$$

の最小値を調べることにより，任意の正数 a，b，c に対して

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geqq abc$$

が成り立つことを示せ．

アプローチ 指示された通り考えてゆけば解決します．

解答 $f(x)=a^3+b^3+x^3-3abx$

$f'(x)=3(x^2-ab)$

$ab>0$ ▶ $=3(x+\sqrt{ab})(x-\sqrt{ab})$

より，$x>0$ の範囲での $f(x)$ の増減は右の表のようになる．

x	(0)		$\sqrt{ab}$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

したがって，$f(x)$ は $x=\sqrt{ab}$ のときに最小になり，

最小値 $=f(\sqrt{ab})$

$=a^3+b^3-2\sqrt{a^3b^3}$

$=(a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}})^2$　　である．

よって，これが0以上であることから

$x>0$ の範囲で，$f(x)\geqq 0$

つまり，

$$a^3+b^3+x^3-3abx\geqq 0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立つ．そこで，①において，とくに，$x=c\ (>0)$ とおけば，$a^3+b^3+c^3-3\cdot abc\geqq 0$

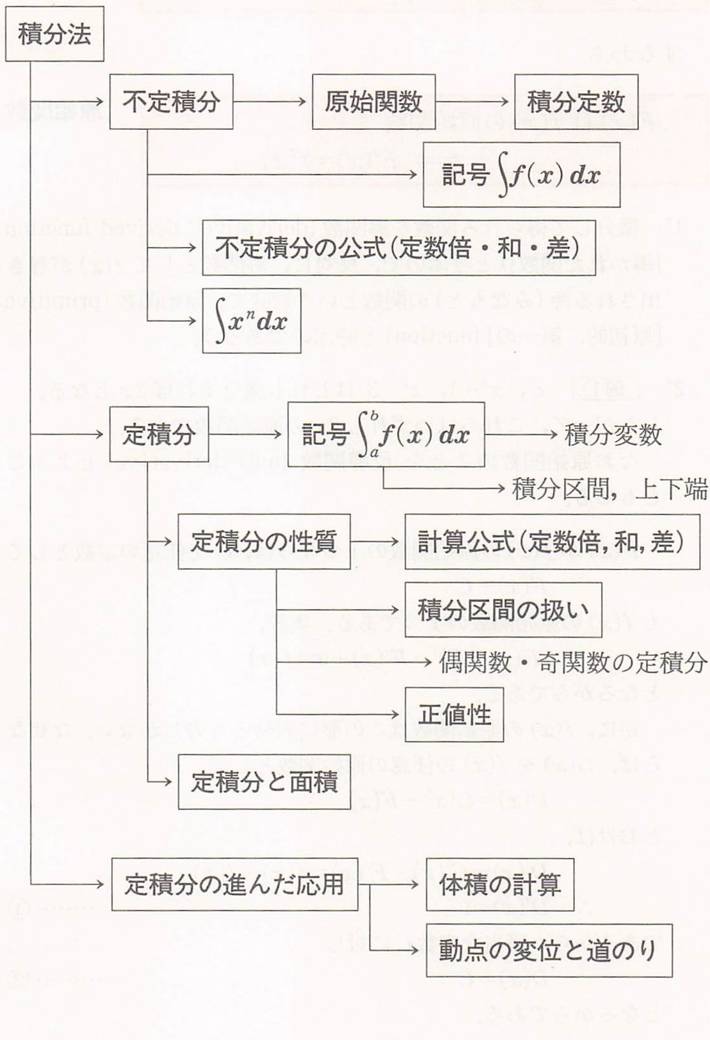
$$\therefore \quad \frac{a^3+b^3+c^3}{3}\geqq abc \quad \text{が得られる．} ■$$

[注]　“等号はいつ成立するか”という要求はないので，答案としてはこれに触れなくてもO.Kであるが，調べれば $a=b=c$ のときに限り成り立つことがわかる．

研究　本問の結果で a，b，c をそれぞれ $\sqrt[3]{a}$，$\sqrt[3]{b}$，$\sqrt[3]{c}$ でおきかえれば3変数の場合の“相加・相乗平均”の不等式が得られます．

§5 積　分

キー・ワード　（A基礎理論篇）



A5.1 不定積分

まず，微分の逆演算を考えよう．

> [定義]　x の関数 $f(x)$ が与えられたとき，微分すれば $f(x)$ となる関数 $F(x)$ のことを $f(x)$ の **原始関数** という．

すなわち

> $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数
> $$\iff F'(x)=f(x)$$

原始関数

1°　微分して得られる関数を導関数 (derivative ; derived function [導かれた関数]) と呼ぶので，反対に，導関数として $f(x)$ が導き出される源（みなもと）の関数という意味で，原始関数 (primitive [原初的，第一の] function) と呼ぶのであろう．

2°　例1　x^2，x^2+1，x^2-3 はどれも微分すれば $2x$ となる．したがって，これらはいずれも $2x$ の原始関数である．

なお原始関数のことを **反導関数** (anti-derivative) とよぶこともある．

$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数の１つならば，C を任意の定数として

$$F(x)+C$$

も $f(x)$ の原始関数の１つである．実際，

$$(F(x)+C)'=F'(x)+0=f(x)$$

となるからである．

逆に，$f(x)$ の原始関数はこの形に表せるものしかない．なぜならば，$G(x)$ を $f(x)$ の任意の原始関数として，

$$D(x)=G(x)-F(x)$$

とおけば，

$$D'(x)=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)$$

$$\therefore \quad D'(x)=0 \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

であるから，適当な定数 C に対し

$$D(x)=C \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

となるからである．

つまり，$f(x)$ の原始関数は，無限にたくさん存在するが，それらの違いは定数項だけである．そこで，このような，関数 $f(x)$ の原始関数をまとめて

$$\int f(x)dx$$

という記号で表し，これを $f(x)$ の **不定積分** とよぶ．よって

不定積分の記号と積分定数

> $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とすると
>
> $$\int f(x)dx = F(x) + C$$

ここで定数 C は，任意の定数であり，**積分定数** とよばれる．

与えられた $f(x)$ に対して，その不定積分や原始関数を求めることを，$f(x)$ を **積分する** (integrate) という．

1°　例 2　$\int 2x\,dx = x^2 + C$（C は積分定数）

このように，不定積分を求めよという問題に答える際には，積分定数をつけて答えるのが正式である．

2°　定義より　$\dfrac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$

3°　上の議論で①から②を導く部分は，「当り前」に感ずる読者も多いであろうが，これを厳密に証明するのは意外に高級である．たとえば，数学IIIで学ぶ「平均値の定理」を利用する方法がある．

4°　実は，上に示した不定積分の定義は，厳密でない．「$f(x)$ の原始関数を「まとめて」というのが，$f(x)$ の原始関数の集合を作ることなのか，$f(x)$ の原始関数の一般形を表すことなのか，が明確でないからである．

大学以上では，原始関数と不定積分は，はっきり区別されるが，それでもその区別は概念上のことであり，指し示している実態は，一致しているといってよい．したがって高校レベルでこの違いに固執することは，実践的には無意味である．

A5.2 不定積分の求め方

すでにのべた微分法の公式 A4.7 から直ちに次の公式をうる.

x^m の不定積分

> [定理] m が正整数ならば
>
> $$\int x^m dx = \frac{1}{m+1}x^{m+1} + C$$
>
> (C は積分定数)

1° 例 1 $\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$

不定積分の線形性

> [定理]
>
> (1) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ (k は定数)
>
> (2) $\int \{f(x)+g(x)\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
>
> (3) $\int \{f(x)-g(x)\}dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

2° ここで, $f(x)$, $g(x)$ は $\int f(x)dx$, $\int g(x)dx$ が定義できるような関数(たとえば, 2 次関数, 3 次関数, ……)とする.

3° 上の公式には, 両辺に不定積分が現れている. 積分定数にもとづく"不安さ"を考えると, たとえば, (2)は次のように読まねばならない.

"$f(x)+g(x)$ の不定積分の全体は, $f(x)$ の不定積分と $g(x)$ の不定積分の和として得られる関数の全体と一致する."

4° 上の 2 つの定理を組み合せれば, 次のような計算が可能になる.

例 2
$$\int (2x^2-1)^3 dx = \int (8x^6 - 12x^4 + 6x^2 - 1)dx$$
$$= 8\int x^6 dx - 12\int x^4 dx + 6\int x^2 dx - \int 1\, dx$$
$$= \frac{8}{7}x^7 - \frac{12}{5}x^5 + 2x^3 - x + C$$

A5.3　定 積 分

考えている区間 $a \leqq x \leqq b$ において，$f(x)$ の1つの原始関数を $F(x)$ とする．このとき，

$$F(b)-F(a) \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

を，$f(x)$ の a から b までの **定積分** といい，

$$\int_a^b f(x)dx$$

で表す．なお，①の量をしばしば

$$\Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b},\ \text{または単に}\ \Big[F(x)\Big]_a^b$$

と書く．すなわち，

定積分とその記号

> [定義]　$F(x)$ が区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x)$ の原始関数であるとき，
>
> $$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$
>
> ……… ☆

1°　例1　$f(x)=2x$ とすると，$F(x)=x^2$ は $f(x)$ の原始関数である．

$$\therefore \quad \int_1^3 2x\,dx=\Big[x^2\Big]_1^3=3^2-1^2=8$$

2°　定積分 $\int_a^b f(x)dx$ において，

$f(x)$ を **被積分関数**，a を **下端** (カタン)，b を **上端** (ジョウタン) という．また，

x は **積分変数** とよばれ，区間 $a \leqq x \leqq b$ を **積分区間** という．

定積分の値は，被積分関数の形と上端，下端とを与えれば定まり，積分変数を表す文字にはよらない．

すなわち，$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du=\cdots\cdots$

3°　定積分の下端 a，上端 b について

$$a<b$$

でない場合にも☆で，$\int_a^b f(x)dx$ を定義する．

たとえば，$a=b$ のときには，☆によって，“a から a までの定積分”が

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(a)-F(a)=0$$

と定義される．このように，$\int_a^b f(x)dx$ は a，b の大小によらず☆によって定義されるわけである．☞ 例 2

例 2　$\int_3^1 2x\,dx=\Big[x^2\Big]_3^1=1-9=-8$

4°　いま，$F(x)$，$G(x)$ がともに $f(x)$ の不定積分であれば，

$$G(x)=F(x)+C \quad (C\text{は定数})$$

だから，

$$F(b)-F(a)=G(b)-G(a),\ \text{すなわち}\ \Big[F(x)\Big]_a^b=\Big[G(x)\Big]_a^b$$

が成り立つ．

よって，$f(x)$ の定積分を計算するときには，$f(x)$ のどの不定積分を用いてもよい．

A 5.4 定積分の性質

以下，厳密にいうと，定積分を考える関数はすべて積分区間内で連続であると仮定する．数学IIで積分を考える関数は，すべてそのようになっている．

[定理]

(1) $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$　（k は定数）

(2) $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

(3) $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

定積分の線形性

1°　証明は定積分の定義と，不定積分の線型性から明らかである．

2°　例1　$\int_{-1}^{3}(3x^2+4x-4)dx$：

$(x^3+2x^2-4x)'=3x^2+4x-4$ に注意して，

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3}(3x^2+4x-4)dx&=\Big[x^3+2x^2-4x\Big]_{-1}^{3}\\&=(3^3+2\cdot3^2-4\cdot3)\\&\quad-\{(-1)^3+2(-1)^2-4(-1)\}\\&=33-5=28\end{aligned}$$

としてもよいが，上の定理により次のように計算してもよい．

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3}(3x^2+4x-4)dx&=\int_{-1}^{3}x^2dx+4\int_{-1}^{3}x\,dx-4\int_{-1}^{3}dx\\&=\Big[x^3\Big]_{-1}^{3}+2\Big[x^2\Big]_{-1}^{3}-4\Big[x\Big]_{-1}^{3}\\&=28+2\cdot8-4\cdot4=28\end{aligned}$$

[定理]　a，b，c の大小によらず

(1)　$\int_a^a f(x)dx=0$

(2)　$\int_b^a f(x)=-\int_a^b f(x)dx$

(3)　$\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$

1°　証明は，$f(x)$ の原始関数の１つを $F(x)$ として定積分の定義を用いれば明らかである．たとえば，

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx&=\{F(b)-F(a)\}+\{F(c)-F(b)\}\\&=F(c)-F(a)=\int_a^c f(x)dx\end{aligned}$$

2°　上の(3)は $f(x)$ を表す式が x の範囲によって異なっている定積分の計算のためにも利用される．

例2　$\int_{-1}^{2}2|x|dx=\int_{-1}^{0}2|x|dx+\int_{0}^{2}2|x|dx$

そうして，$-1\leqq x\leqq 0$ では，$2|x|=-2x$ で不定積分は $-x^2$，
　　$0\leqq x\leqq 2$ では，$2|x|=2x$ で不定積分は x^2

であるから，

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}2|x|dx&=\int_{-1}^{0}(-2x)dx+\int_{0}^{2}2x\,dx\\&=\Big[-x^2\Big]_{-1}^{0}+\Big[x^2\Big]_{0}^{2}=1+4=5\end{aligned}$$

[定理]

(1)　$f(x)$ が偶関数ならば $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$

(2)　$f(x)$ が奇関数ならば $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$

偶関数と奇関数の定積分

1°　定義域に属する任意の x に対して $f(-x)=f(x)$ が成り立つ関数 $f(x)$ が偶関数である．偶関数のグラフは y 軸に関し対称である．

定義域に属する任意の x に対して $f(-x)=-f(x)$ が成り立つ関数 $f(x)$ が奇関数である．奇関数のグラフは原点に関し対称である．

2°　例 3　x^n は n が偶数なら偶関数，n が奇数なら奇関数である．

$$\int_{-a}^{a} x^4 dx=2\int_{0}^{a} x^4 dx,\quad \int_{-a}^{a} x^5 dx=0$$

◈ 上端の関数とみた定積分 ◈

$\int_{a}^{b} f(x)dx$ は，a を固定すると b の関数である．積分変数を表す文字を取りかえて書くと，$\int_{a}^{x} f(t)dt$ は x の関数である，ということになる．この関数を $G(x)$ とおくと，$G(x)$ は目覚しい性質

i)　$G(a)=0$

ii)　$G'(x)=f(x)$

をもつ．すなわち

[定理]　$\int_{a}^{x} f(x)dt=G(x)$

$\iff G'(x)=f(x)$ かつ $G(a)=0$

微積分法の基本定理

1°　“定積分を上端で微分すれば被積分関数が出てくる”といえる．また，$f(x)$ の不定積分のうち，$x=a$ のとき 0 となるものが，

定積分 $\int_{a}^{x} f(t)dt$

であるともいえる．

2°　定理の証明：

$f(x)$ の不定積分の１つを $F(x)$ とすると，$F'(x)=f(x)$ であるから

$$G(x)=\int_a^x f(t)\,dt=F(x)-F(a)$$

よって $\begin{cases} G'(x)=F'(x)=f(x) \\ G(a)=0 \end{cases}$

逆に

$\begin{cases} G'(x)=f(x) \\ G(a)=0 \end{cases}$ であるとすると

$$\int_a^x f(t)\,dt=\Big[G(t)\Big]_a^x=G(x)-G(a)=G(x)$$

> ［定理］　$a<b$ とする．
>
> $$a\leqq x\leqq b \text{ で } f(x)\geqq 0 \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx\geqq 0$$

定積分の符号

1°　証明：$F(x)$ を $f(x)$ の不定積分の１つとする．

$g(x)=\int_a^x f(x)\,dx=F(x)-F(a)$ を考えると，

$$g'(x)=F'(x)=f(x)\geqq 0$$

よって，$g(x)$ は $a\leqq x\leqq b$ で増加で，$g(x)\geqq g(a)=0$.

$$\therefore\quad \int_a^b f(x)\,dx=g(b)\geqq 0$$

2°　上の定理を，$g(x)-f(x)$ に適用することにより次の定理が得られる．

> ［定理］　$a<b$ とする．
>
> $a\leqq x\leqq b$ で $f(x)\leqq g(x)$ ならば
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx\leqq\int_a^b g(x)\,dx$$

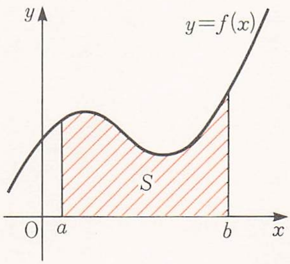
定積分の大小

3°　$-|f(x)|\leqq f(x)\leqq |f(x)|$ はつねに成立する不等式であるから，$a<b$ ならば，

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx\leqq\int_a^b f(x)\leqq\int_a^b |f(x)|\,dx,$$

$$\therefore\quad \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leqq\int_a^b |f(x)|\,dx$$

A5.5 面積と定積分



［定理］ 区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq 0$ であり，$f(x)$ が連続であるならば，

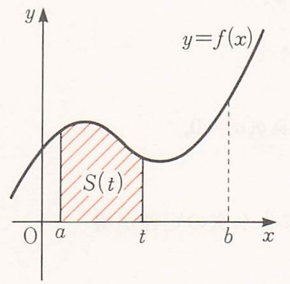
定積分　$I=\int_a^b f(x)dx$

の値は，

x 軸，直線 $x=a$，$x=b$ の3直線と曲線 $y=f(x)$ とによって囲まれる部分の面積 S に等しい．

1°　証明

$S(t)$ により，3直線 x 軸，$x=a$，$x=t$ および曲線 $y=f(x)$ とによって囲まれる面積を表す．

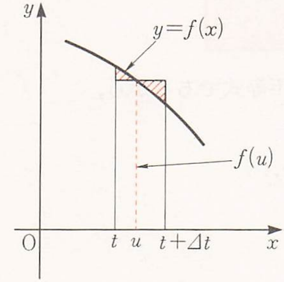


このとき，t の増分 Δt に対する $S(t)$ の増分

$$\Delta S=S(t+\Delta t)-S(t)$$

は，区間 $t \leqq x \leqq t+\Delta t$ において，曲線 $y=f(x)$ と x 軸との間にある部分の面積である．

$\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ を考えると，t から $t+\Delta t$ までの微小範囲における"$f(x)$ の平均の高さ"であるから，$\Delta t \to 0$ のとき $\dfrac{\Delta S}{\Delta t} \to f(t)$ となることがわかる．



すなわち，

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}=f(t) \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

実は，$\Delta t<0$ のときにも同様に事実が成り立つ．したがって

$$\frac{dS}{dt}=S'(t)=f(t) \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

すなわち，$S(t)$ は $f(t)$ の原始関数である．

したがって，

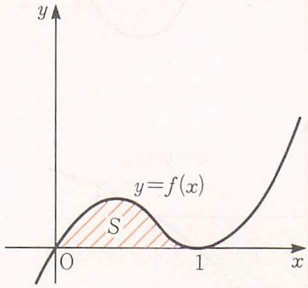
$$I=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=S(b)-S(a) \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

ところが，$S(a)=0$ であるから，

$$I=S(b)=S \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

例　曲線 $y=f(x)=x(1-x)^2$ の x 軸と囲まれる有限部分の面積を S とすると

$$S=\int_0^1 f(x)dx$$
$$=\int_0^1 (x-2x^2+x^3)dx$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{12}$$



A5.6　定積分の応用(面積)

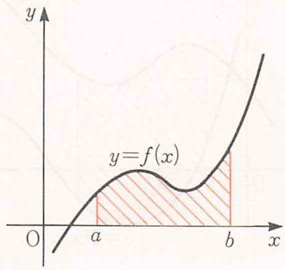
曲線の囲む面積は定積分を応用して求められる．曲線の方程式が与えられてそれらが囲む部分の面積を求めるには，まず曲線の概形をえがき，どのような定積分で表されるかを確認した上で計算を進める．

I． 区間 $[a,\ b]$ でつねに $f(x)\geqq 0$ ならば，x 軸，$x=a$，$x=b$ および曲線 $y=f(x)$ で囲まれる部分

$$\{(x,\ y)\,|\,a\leqq x\leqq b,\ 0\leqq y\leqq f(x)\}$$

の面積 S は

$$S=\int_a^b f(x)dx \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

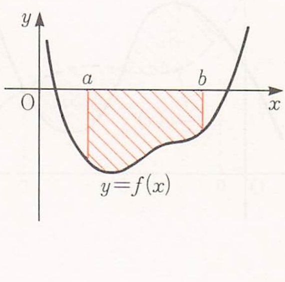


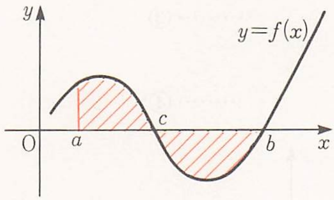
なお，一般に **面積は境界線が含まれるか否かに影響されない．**

1°　区間 $[a,\ b]$ で $f(x)$ の正負は定まらないが，定符号であることが保証されている場合には，x 軸，$x=a$，$x=b$，$y=f(x)$ の囲む面積は

$$S=\left|\int_a^b f(x)dx\right|=\int_a^b |f(x)|dx \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

としてよい．





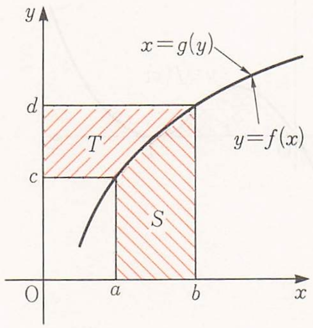
また，区間 $[a,\ b]$ で $f(x)$ が定符号でないときも

$$S=\int_a^b|f(x)|dx \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

としてよいが，実際に計算するときには，$f(x)$ の符号を調べて，たとえば左図の場合なら

$$S=\int_a^c f(x)dx-\int_c^b f(x)dx \quad \cdots\cdots\cdots ③'$$

と直してから計算することになる．



2°　左図のような部分の面積 T を求めるには，境界の曲線の方程式を $x=g(y)$ として

$$T=\int_c^d g(y)dy \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

のように y について積分するのが便利である．

II.

［公式］　$a \leqq x \leqq b$ でつねに

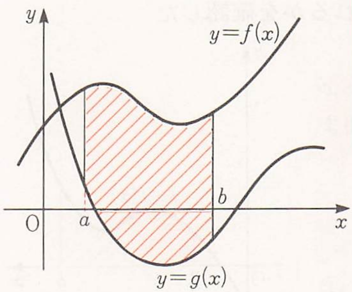
$$f(x) \geqq g(x)$$

ならば，

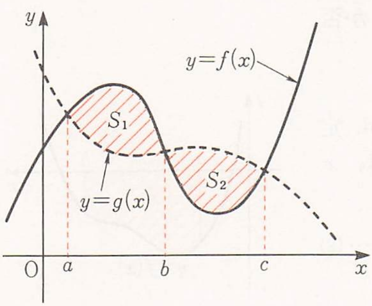
$$x=a,\ x=b,\ y=f(x),\ y=g(x)$$

の囲む部分の面積 S は

$$S=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$$



1°　$f(x) \geqq g(x)$ という大小関係が大切であって，$f(x)$，$g(x)$ 自身の符号はどうでもよい．



2°　2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ が図のように交わって作る 2 つの部分の面積を S_1，S_2 とすると，

$$\int_a^c|f(x)-g(x)|dx=S_1+S_2$$

であるが，

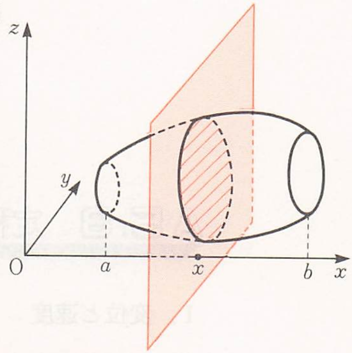
$$\int_a^c\{f(x)-g(x)\}dx=S_1-S_2$$

となる．

指導要領に従うと，数学IIの積分では，面積までとし，体積や道のりは(「数学IIIまわし」ということで)扱わないことになっている．しかし，これらは，積分法の最も重要なテーマであり，過去数十年に渡って大学入試問題の最頻出単元であった．本書の読者なら十分に理解することができるし，入試に向けてこれを修得しておくことのメリットは十二分にあると考えて，敢えて収録することにした．もちろん，初読の際は，省略してもよいだろう．

A5.7　定積分の応用(体積)

I．垂直断面積と体積



[公式]　x 軸上の点 $(x,\ 0,\ 0)$ を通り x 軸に垂直な平面での切り口の面積が $S(x)$ である立体の
2平面 $x=a$，$x=b$ 間の体積 V は

$$V=\int_a^b S(x)dx$$

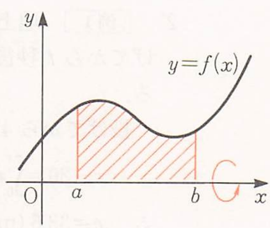
1°　この公式は，区間 $[a,\ x]$ の部分にある立体の体積を $V(x)$ とすると $\dfrac{d}{dx}V(x)=S(x)$ が成立することを，A5.5 と同様の論法で導くことによって得られる．

2°　一般に，立体の体積を求める問題では，適当な座標軸を定め，その x 軸に垂直な平面による切り口の面積 $S(x)$ が計算できるならば，上の公式の利用が考えられる．

II．回転体の体積

[公式]　区間 $[a,\ b]$ で曲線 $y=f(x)$ と x 軸とではさまれた図形を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積 V は

$$V=\pi\int_a^b f(x)^2dx=\pi\int_a^b y^2dx$$



1°　x 軸に垂直な平面での立体の切り口は円板で，その面積が $S(x)=\pi\{f(x)\}^2$ だから，下の公式は上の公式の特別な場合である．

2°　例　半径 r の球の体積を求めるには，この球を半円 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ と x 軸とで囲まれた範囲を x 軸のまわりに回転して得られる回転体と考えて，その体積は

$$V=\pi\int_{-r}^{r}y^2dx=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)dx$$
$$=2\pi\int_0^r(r^2-x^2)dx=2\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^r=\frac{4\pi}{3}r^3$$

A5.8 定積分の応用（変位と道のり）

I．変位と速度

［公式］　x 軸上を運動する動点Pの時刻 t における速度 v が $v=f(t)$ で表されるとする．

$t=a$，$t=b$ におけるPの座標をそれぞれ x_1，x_2 とすると，$t=a$ から $t=b$ までの変位（座標の差）は

$$x_2-x_1=\int_a^b vdt=\int_a^b f(t)dt$$

直線上の動点の変位

1°　$\dfrac{dx}{dt}=v=f(t)$ から直ちに得られる．

2°　例 1　地上 30 m の点から真上に投げられた物体の，投げ上げてから t 秒後の速度 v(m/秒) が $v=28-9.8t$ で表されるとする．

投げてから 4 秒後の高さを x とすると，

$$x-30=\int_0^4 v\,dt=\int_0^4(28-9.8t)dt=\left[28t-4.9t^2\right]_0^4=33.6$$

∴　$x=33.6$ (m)

II.　道のりと速度

[公式]　x 軸上を運動する動点Pの時刻 t における速度 v が $v=f(t)$ で表されるとする．

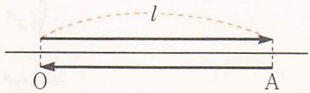
$t=a$ から $t=b$ まで動点の動いた距離 s は

$$s=\int_a^b |v|\,dt=\int_a^b |f(t)|\,dt$$

この s を $t=a$ から $t=b$ までの動点Pの **道のり** という．

直線上の動点の道のり

1°　動点が $t=0$ で点Oから出発し，右に l だけすすんで点Aに達してから左にすすんで，$t=1$ で点Oにもどったとする．このとき $t=0$ から $t=1$ までの間における，動点の変位は0，道のりは $2l$ である．



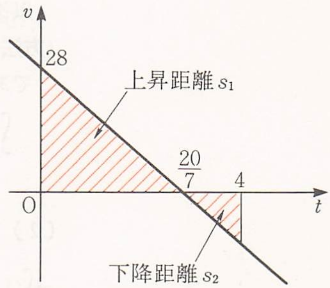
2°　例2　上の例1の場合，t と v の関係を図示すると右図のようになる．

図の2つの斜線部分の面積を s_1，s_2 とすると，

s_1＝上昇距離，s_2＝下降距離

を表す．そして，

$$\left.\begin{array}{ll}\text{変位} & x-30=s_1-s_2 \\ \text{道のり} & s=s_1+s_2\end{array}\right\}\ \text{である．}$$



――A5　おわり――



B.501

次の不定積分を2通りの方法で求めよ．

(方法1) 積分すべき関数を初めに展開してから項別に積分する．

(方法2) $(ax+b)^n$ を微分すると $na(ax+b)^{n-1}$ になること (B.404) を利用する．

(1) $\displaystyle\int(x-2)^3dx$　　　(2) $\displaystyle\int(1-2x)^3dx$

アプローチ 不定積分についての基本問題です．

解答 **(1)** **(方法1)** $\displaystyle\int(x-2)^3dx$

$$=\int(x^3-6x^2+12x-8)dx=\int x^3dx-6\int x^2dx+12\int x\,dx-8\int dx$$

$$=\frac{1}{4}x^4-6\cdot\frac{1}{3}x^3+12\cdot\frac{1}{2}x^2-8\cdot x+C \quad (C\text{は積分定数})$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}x^4-2x^3+6x^2-8x+C}$$

以後 C は積分定数を表すものとする．

(方法2) $\{(x-2)^4\}'=4(x-2)^3$

であるから

$$\int(x-2)^3dx=\boldsymbol{\frac{1}{4}(x-2)^4+C}$$

(2) **(方法1)** $\displaystyle\int(1-2x)^3dx$

$$=\int(1-6x+12x^2-8x^3)dx=\boldsymbol{x-3x^2+4x^3-2x^4+C}$$

(方法2) $\{(1-2x)^4\}'=4\cdot(-2)(1-2x)^3=-8(1-2x)^3$

であるから

$$\int(1-2x)^3dx=\boldsymbol{-\frac{1}{8}(1-2x)^4+C}$$

[注] "不定積分を求めよ"という場合，原始関数をすべて求めよという意味なので，積分定数 C をつけて答えるのが良い．

「任意の定数」を表すなら，どんな記号でも良いが，英仏語圏では，定数を意味する英語の constant (仏語では constante) の頭文字"C"を用いるのが習慣になっている．

B.502

つぎの定積分を求めよ．

(1) $\int_0^2 x^3 dx$　　(2) $\int_{-1}^3 (y^3-2y^2+4)dy$

(3) $\int_1^3 (t-1)(t-4)dt$　　(4) $\int_1^{\frac{1}{3}} (3x-1)^3 dx$

アプローチ 定積分の基本問題です．

解答 (1) $\int_0^2 x^3 dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2=\frac{1}{4}(2^4-0^4)=\mathbf{4}$

◀ $\left[\frac{1}{4}x^4+C\right]_0^2$ としても結局 C は消えるので，C はつけなくてもよい．

(2) $\int_{-1}^3 (y^3-2y^2+4)dy=\left[\frac{1}{4}y^4-\frac{2}{3}y^3+4y\right]_{-1}^3$

$=\frac{1}{4}\{3^4-(-1)^4\}-\frac{2}{3}\{3^3-(-1)^3\}$

$+4\{3-(-1)\}$

$=\frac{1}{4}\cdot 80-\frac{2}{3}\cdot 28+4\cdot 4=\mathbf{\frac{52}{3}}$

◀ 項ごとに上端・下端の差を計算するのがやりやすい．

(3) $\int_1^3 (t-1)(t-4)dt=\int_1^3 (t^2-5t+4)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+4t\right]_1^3$

$=\frac{1}{3}(3^3-1^3)-\frac{5}{2}(3^2-1^2)+4(3-1)$

$=\frac{1}{3}\cdot 26-\frac{5}{2}\cdot 8+4\cdot 2=\mathbf{-\frac{10}{3}}$

(4) $\int_1^{\frac{1}{3}} (3x-1)^3 dx=\left[\frac{1}{3\cdot 4}(3x-1)^4\right]_1^{\frac{1}{3}}$

◀ B.501 参照

$=\frac{0^4-2^4}{12}=\mathbf{-\frac{4}{3}}$

［注］ (3)において，積分区間の下端の値 $t=1$ が被積分関数の値を 0 にすることに注目し，$(t-1)$ の多項式とみて展開し積分すると $t=1$ を代入する手間が省け計算が楽になる．

(3)の**別解** $\int_1^3 (t-1)(t-4)dt=\int_1^3 (t-1)\{(t-1)-3\}dt$

$=\int_1^3 \{(t-1)^2-3(t-1)\}dt=\left[\frac{1}{3}(t-1)^3-\frac{3}{2}(t-1)^2\right]_1^3$

$=\frac{1}{3}\cdot 2^3-\frac{3}{2}\cdot 2^2=-\frac{10}{3}$

B.503

次の(1)，(2)の公式を証明し，(3)の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-a}^{a} x^{2n-1}dx=0$　　　(2) $\displaystyle\int_{-a}^{a} x^{2n}dx=2\int_{0}^{a} x^{2n}dx$

（a は任意の定数，n は正の整数）

(3) $\displaystyle I=\int_{-1}^{1} x^2(x+1)^3dx$

アプローチ 特殊な定積分の公式です．

(1)と(2)を使うと(3)の計算が楽になります．

解答 **(1)** $\displaystyle\int_{-a}^{a} x^{2n-1}dx=\left[\frac{1}{2n}x^{2n}\right]_{-a}^{a}$

$(-a)^{2n}=(-1)^{2n}\cdot a^{2n}=a^{2n}$ ▶

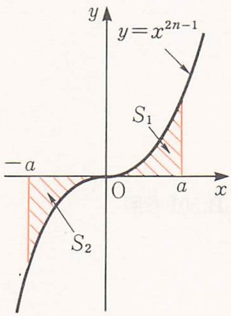
$\displaystyle=\frac{a^{2n}-(-a)^{2n}}{2n}=\frac{a^{2n}-a^{2n}}{2n}=0$ ■

$(-a)^{2n+1}=(-1)^{2n+1}\cdot a^{2n+1}=-a^{2n+1}$ ▶

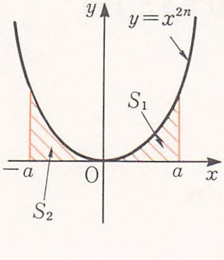
(2) $\displaystyle\int_{-a}^{a} x^{2n}dx=\left[\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\right]_{-a}^{a}$

$\displaystyle=\frac{a^{2n+1}-(-a)^{2n+1}}{2n+1}$

$\displaystyle=2\cdot\frac{a^{2n+1}}{2n+1}=2\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_{0}^{a}=2\int_{0}^{a} x^{2n}dx$ ■



［斜線部の面積 $S_1=S_2$］



(3) $\displaystyle I=\int_{-1}^{1} x^2(x+1)^3dx$

$\displaystyle=\int_{-1}^{1}(x^5+3x^4+3x^3+x^2)dx$

$\displaystyle=\int_{-1}^{1}(3x^4+x^2)dx=2\int_{0}^{1}(3x^4+x^2)dx$

$\displaystyle=2\left[\frac{3}{5}x^5+\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1}=\mathbf{\frac{28}{15}}$

［注］ $y=x^{2n-1}$，$y=x^{2n}$ のグラフは，左図のようにそれぞれ原点対称，y 軸対称であるので，後に学ぶ面積と定積分の関係を知るなら，上の公式(1)，(2)の成立は明らかとなる．

$\displaystyle\int_{-a}^{a} x^{2n-1}dx=\int_{-a}^{0} x^{2n-1}dx+\int_{0}^{a} x^{2n-1}dx$

$=-S_2+S_1=0$

$\displaystyle\int_{-a}^{a} x^{2n}dx=\int_{-a}^{0} x^{2n}dx+\int_{0}^{a} x^{2n}dx$

$\displaystyle=S_2+S_1=2S_1=2\int_{0}^{a} x^{2n}dx$

B. 504

次の公式を証明せよ．

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(\beta-x)\,dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

アプローチ 左辺を計算して右辺を導きますが，

（方法１）　実直に展開してから積分する

（方法２）　$(x-\alpha)$ の多項式とみて展開し積分する

のどちらが楽でしょうか．

解答　**（方法１）**

$$\begin{aligned}
\text{左辺}&=\int_{\alpha}^{\beta}\{-x^2+(\alpha+\beta)x-\alpha\beta\}\,dx\\
&=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{(\alpha+\beta)}{2}x^2-\alpha\beta x\right]_{\alpha}^{\beta}\\
&=-\frac{\beta^3-\alpha^3}{3}+\frac{\alpha+\beta}{2}(\beta^2-\alpha^2)-\alpha\beta(\beta-\alpha)\\
&=\frac{\beta-\alpha}{6}\{-2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+3(\alpha+\beta)^2-6\alpha\beta\}\\
&=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)\\
&=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\text{右辺}\quad \blacksquare
\end{aligned}$$

（方法２）

$$\begin{aligned}
\text{左辺}&=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)\{(\beta-\alpha)-(x-\alpha)\}\,dx\\
&=\int_{\alpha}^{\beta}\{(\beta-\alpha)(x-\alpha)-(x-\alpha)^2\}\,dx\\
&=\left[\frac{\beta-\alpha}{2}(x-\alpha)^2-\frac{(x-\alpha)^3}{3}\right]_{\alpha}^{\beta}\\
&=\frac{(\beta-\alpha)^3}{2}-\frac{(\beta-\alpha)^3}{3}\\
&=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\text{右辺}\quad \blacksquare
\end{aligned}$$

◀ $(x-\alpha)$ の多項式とみて展開．

◀ B.501 参照

［注］　この公式は，放物線 $y=(x-\alpha)(\beta-x)$ と x 軸とが囲む部分の面積のみならず，放物線と直線，放物線と放物線とが囲む図形の面積にも利用できる．応用例については

☞ B. 505，506，510，511，512

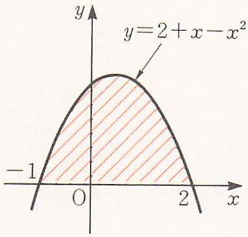
B. 505

次の各図形の面積を求めよ．

(1)　曲線 $y=2+x-x^2$ と x 軸との囲む図形．

(2)　曲線 $y=x^2-2x-5$ と x 軸との囲む図形．

アプローチ　面積に関する基本問題です．



解答　(1)　$y=2+x-x^2$ と x 軸との交点は，

$x^2-x-2=0$ より，$x=-1,\ 2$

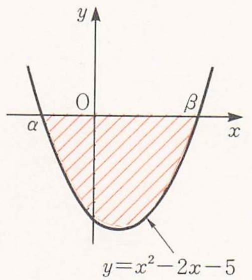
であり，題意の図形は左図の斜線部である．

よって，その面積を S とすれば，

$$S=\int_{-1}^{2}(2+x-x^2)dx=\left[2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}$$

$$=2\{2-(-1)\}+\frac{2^2-(-1)^2}{2}-\frac{2^3-(-1)^3}{3}=\boldsymbol{\frac{9}{2}}$$

となる．



(2)　$y=x^2-2x-5$ と x 軸との交点は，

$x^2-2x-5=0$ より，$x=1\pm\sqrt{6}$．

いま，$\alpha=1-\sqrt{6}$，$\beta=1+\sqrt{6}$ とおけば，曲線は

$$y=(x-\alpha)(x-\beta)$$

と表せ，題意の図形は左図の斜線部となる．

その面積を S とすれば，

$$S=-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

☞ B. 504 ▶

$$=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(\beta-x)dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

となり，これに，

$$\beta-\alpha=(1+\sqrt{6})-(1-\sqrt{6})=2\sqrt{6}$$

を代入して，

$$S=\frac{1}{6}(2\sqrt{6})^3=\boldsymbol{8\sqrt{6}}$$　を得る．

［注］　(2)において，(1)のように直接定積分の形にすると，

$$S=-\int_{1-\sqrt{6}}^{1+\sqrt{6}}(x^2-2x-5)dx=-\left[\frac{x^3}{3}-x^2-5x\right]_{1-\sqrt{6}}^{1+\sqrt{6}}=\cdots\cdots$$

となり，この計算を続行すれば答は得られるが，上の解の方が見通しが良い．もちろん B. 504 の公式は(1)でも使えて

$$\int_{-1}^{2}(2+x-x^2)=\int_{-1}^{2}(x+1)(2-x)=\frac{1}{6}(2+1)^3=\frac{9}{2}$$　となる．

B.506

放物線 $y=x^2+2x-1$ と直線 $y=x+1$ とで囲まれる部分の面積Sを求めよ．

アプローチ 2曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ が囲む図形の面積を求めるためには，まず両者のグラフの上下関係をつかむことが大切です．そのためにも，グラフを描きましょう．

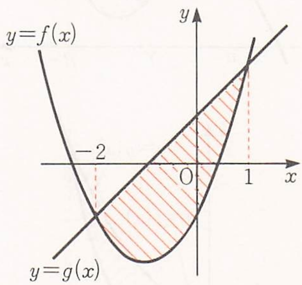
解答 $f(x)=x^2+2x-1$，$g(x)=x+1$ とおくと，

$$\begin{aligned}&f(x)-g(x)\\&\quad=(x^2+2x-1)-(x+1)\\&\quad=x^2+x-2=(x+2)(x-1) \quad\cdots\cdots\cdots ①\end{aligned}$$

より，両者の交点の x 座標は

$$x=-2,\ 1$$

で，グラフは右図のようになる．



$-2\leqq x\leqq 1$ では $g(x)\geqq f(x)$ であるから，

$$\begin{aligned}S&=\int_{-2}^{1}\{g(x)-f(x)\}dx \quad\cdots\cdots\cdots ②\\&=\int_{-2}^{1}(-x^2-x+2)dx\\&=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1}\\&=-\frac{1^3-(-2)^3}{3}-\frac{1^2-(-2)^2}{2}+2(1+2)\\&=\boldsymbol{\frac{9}{2}}\end{aligned}$$

となる．

［注］ 上の解答で，交点の x 座標を求めるために考えた①と，面積を求めるために作った②の被積分関数は，全体の符号が異なるだけである．このことに注目すると，やはり，B. 504 の公式が適用できる．

$$\begin{aligned}S&=\int_{-2}^{1}\{g(x)-f(x)\}dx\\&=\int_{-2}^{1}(x+2)(1-x)dx\\&=\frac{1}{6}(1+2)^3=\frac{9}{2}\end{aligned}$$

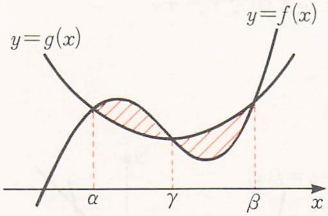
B.507

曲線 $y=x(x-2)^2$ と放物線 $y=x^2$ とが囲む2つの部分の面積の和を求めよ．

アプローチ 一般に，左図のような2曲線が囲む図形の面積は

$$\int_\alpha^\beta |f(x)-g(x)|\,dx$$

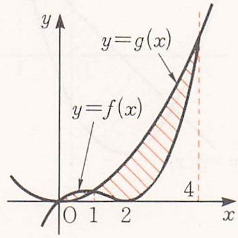
で与えられますが，これを計算するには被積分関数の絶対値記号をはずさなくてはなりません．したがって，やはり，グラフを描いて2曲線の上下関係を明確にすることが大切になります．



解答 $f(x)=x(x-2)^2$，$g(x)=x^2$ とおく．

$$f(x)-g(x)=x(x-2)^2-x^2$$
$$=x^3-5x^2+4x=x(x-1)(x-4)$$

より，2曲線の交点の x 座標は $x=0,\ 1,\ 4$ で，両者の囲む2つの部分は左図の斜線部である．



$0\leqq x\leqq 1$ では $f(x)\geqq g(x)$，

$1\leqq x\leqq 4$ では $g(x)\geqq f(x)$

であるので，求める面積の和 S は

$$S=\int_0^1\{f(x)-g(x)\}dx+\int_1^4\{g(x)-f(x)\}dx$$
$$=\int_0^1(x^3-5x^2+4x)dx+\int_1^4(-x^3+5x^2-4x)dx$$
$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{5x^3}{3}+2x^2\right]_0^1+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{5x^3}{3}-2x^2\right]_1^4$$
$$=2\left(\frac{1}{4}-\frac{5}{3}+2\right)+\left(-\frac{4^4}{4}+\frac{5\cdot4^3}{3}-2\cdot4^2\right)$$
$$=\boldsymbol{\frac{71}{6}}$$

となる．

$S=\int_0^4|f(x)-g(x)|\,dx$ を計算することに相当している．

［注］ $f(x)-g(x)$ の不定積分の1つを $F(x)$ とおくと，求める面積の和 S は，

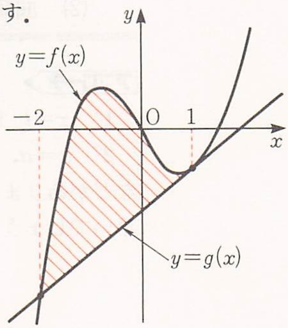
$$S=\int_0^1\{f(x)-g(x)\}dx+\int_1^4\{g(x)-f(x)\}dx$$
$$=\Big[F(x)\Big]_0^1+\Big[-F(x)\Big]_1^4$$
$$=2F(1)-F(0)-F(4)$$

となるので，上の定積分の計算はほんの少し楽できる．

B.508

曲線 $y=x^3-2x$ と，その上の1点 $(1,\ -1)$ における接線とが囲む図形の面積 S を求めよ。

アプローチ まず，接線を求め，両者のグラフを描きます。



解答 $f(x)=x^3-2x$ とおくと，$f'(x)=3x^2-2$ となるので，接線の方程式は

$$y+1=1\cdot(x-1)\qquad \therefore\quad y=x-2$$

である．そこで　$g(x)=x-2$　とおくと，

$$f(x)-g(x)=x^3-3x+2=(x+2)(x-1)^2$$

となるから，$y=f(x)$，$y=g(x)$ のグラフは

$x=1$ で接し，$x=-2$ で交わり，

両者の囲む図形は右図の斜線部である．

$-2\leqq x\leqq 1$ では，$f(x)\geqq g(x)$ だから，

◀この大小関係を確認するために，グラフの概形を描くのがよい．

$$S=\int_{-2}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx=\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}$$

$$=\frac{1^4-(-2)^4}{4}-3\cdot\frac{1^2-(-2)^2}{2}+2\cdot\{1-(-2)\}$$

$$=\frac{27}{4}$$

[注]　上の解答では，積分を計算するのに，被積分関数を x の3次式として展開した式を項別に積分したが，B.504で学んだ計算技術を用いると，より簡単に計算できる．

$$(x+2)(x-1)^2=\{(x-1)+3\}(x-1)^2$$
$$=(x-1)^3+3(x-1)^2$$

◀被積分関数を $x-1$ の3次式として展開する．

$$\therefore\quad \int_{-2}^{1}(x+2)(x-1)^2dx=\int_{-2}^{1}\{(x-1)^3+3(x-1)^2\}dx$$

$$=\left[\frac{(x-1)^4}{4}+(x-1)^3\right]_{-2}^{1}=-\frac{3^4}{4}+3^3$$

◀$x=1$ を代入する手間が省ける．

同様な計算方法により，

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(\beta-x)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(\beta-x)^2dx=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$$

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(\beta-x)^2dx=\frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5$$

なども証明できる．

B.509

$f(x)=x^4-2x^3-3x^2+5x+3$，$g(x)=mx+n$ とするとき，曲線 $y=f(x)$ に直線 $y=g(x)$ が異なる2点で接するという．

(1) 定数 m，n の値を求めよ．

(2) 曲線と直線の囲む部分の面積 S を求めよ．

アプローチ 曲線 $y=f(x)$ に2点で接する接線を求めるには，

1° $x=t$ での接線が再び曲線に接する条件を考える

2° $x=\alpha$，$\beta\ (\alpha\neq\beta)$ での接線が一致する条件を考える

などがありますが，$f(x)$ が x の多項式なので，重根の考えを使うのが早いでしょう．

解答 (1) 2曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が，x 座標が α と $\beta\ (\alpha\neq\beta)$ である2点で接するのは，

4次方程式 $f(x)-g(x)=0$

が，$x=\alpha$，$x=\beta$ をともに重根にもつとき，

したがって，

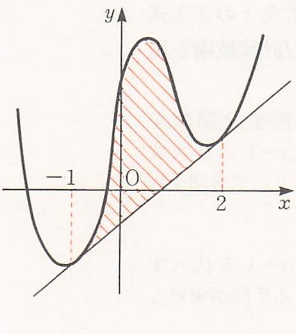
$(x-\alpha)^2(x-\beta)^2=x^4-2x^3-3x^2+(5-m)x+(3-n)$

が恒等的に成立するときである．

▶ $(x+\alpha)^2(x-\beta)^2=x^4-2(\alpha+\beta)x^3+(\alpha^2+\beta^2+4\alpha\beta)x^2-2(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2)x+\alpha^2\beta^2$

この両辺の係数を次数ごとに比較すると，

$$\begin{cases}(x^3\text{ の係数}) & -2(\alpha+\beta)=-2 & \cdots\cdots① \\ (x^2\text{ の係数}) & \alpha^2+\beta^2+4\alpha\beta=-3 & \cdots\cdots② \\ (x\text{ の係数}) & -2(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2)=5-m & \cdots\cdots③ \\ (\text{定数項}) & \alpha^2\beta^2=3-n & \cdots\cdots④\end{cases}$$



①，②より，$\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=-2$． ……⑤

⑤を③，④に代入して， $m=\mathbf{1}$，$n=\mathbf{-1}$ を得る．

(2) ⑤より，α，β は，$t^2-t-2=0$ の2根であるから，$\{\alpha,\ \beta\}=\{-1,\ 2\}$

よって，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ は，$x=-1$，2 の2点で接し，$-1\leqq x\leqq 2$ では，

$f(x)-g(x)=(x+1)^2(x-2)^2\geqq 0$ である．

$$\therefore\quad S=\int_{-1}^{2}\{f(x)-g(x)\}dx=\int_{-1}^{2}(x+1)^2(x-2)^2dx$$

▶ 被積分関数を $x+1$ の4次式として展開．

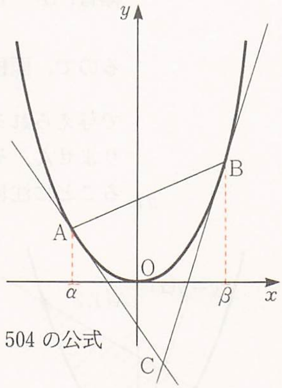
$$=\int_{-1}^{2}(x+1)^2\{(x+1)-3\}^2dx$$

$$=\int_{-1}^{2}\{(x+1)^4-6(x+1)^3+9(x+1)^2\}dx$$

$$=\left[\frac{(x+1)^5}{5}-\frac{3}{2}(x+1)^4+3(x+1)^3\right]_{-1}^{2}=\mathbf{\frac{81}{10}}$$

B. 510

放物線 $y=x^2$ 上の2点 $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2)$, $\mathrm{B}(\beta,\ \beta^2)$ $(\alpha<\beta)$ における接線の交点を $\mathrm{C}(\gamma,\ \delta)$ とする．放物線と直線ABが囲む部分の面積を S_1, 放物線と2直線AC, BCとが囲む部分の面積を S_2 とするとき $S_1:S_2$ は，A，Bの位置によらず一定であることを示せ．



解答　$y=x^2$ に対しては，$y'=2x$ であるから $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2)$, $\mathrm{B}(\beta,\ \beta^2)$ における接線の方程式は

$$y=2\alpha x-\alpha^2,\quad y=2\beta x-\beta^2$$

となるが，この2直線の交点が $\mathrm{C}(\gamma,\ \delta)$ であることから　$\gamma=(\alpha+\beta)/2$　$[\delta=\alpha\beta]$

また，直線ABの方程式は，

$$y=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$$

$$\therefore\quad S_1=\int_\alpha^\beta\{(\alpha+\beta)x-\alpha\beta-x^2\}dx$$

$$=\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(\beta-x)dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

◀B. 504 の公式

一方，$S_2=\displaystyle\int_\alpha^\gamma\{x^2-(2\alpha x-\alpha^2)\}dx$

$$+\int_\gamma^\beta\{x^2-(2\beta x-\beta^2)\}dx$$

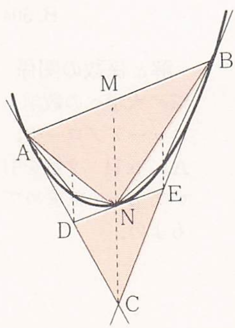
$$=\int_\alpha^\gamma(x-\alpha)^2dx+\int_\gamma^\beta(x-\beta)^2dx$$

$$=\left[\frac{(x-\alpha)^3}{3}\right]_\alpha^\gamma+\left[\frac{(x-\beta)^3}{3}\right]_\gamma^\beta$$

$$=\frac{(\gamma-\alpha)^3}{3}-\frac{(\gamma-\beta)^3}{3}=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3$$

◀$\gamma=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ を代入した．

であるので，$S_1:S_2=2:1$ である．■



参考　放物線 $y=x^2$ 上の異なる2点A，Bにおける接線の交点をC，線分ABの中点をM，CMと放物線との交点をNとすると，“Nは線分CMの中点で，Nにおける接線DEはABに平行”になる．

よって，$\triangle\mathrm{ANB}=\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{ACB}=2\triangle\mathrm{CDE}$

この性質を繰り返し用いると，$S_1:S_2=2:1$ を示すことができる．かのアルキメデスは，これと似たアイデアで，積分法を用いずに S_1 を求めたのである．

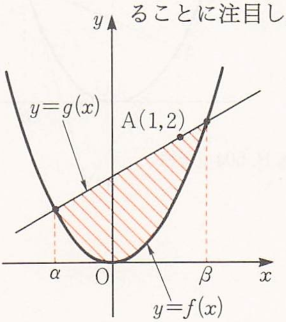
B. 511

放物線 $y=x^2$ ……① と点 A(1, 2) を通る直線とが囲む図形の面積 S が最小になるのは，直線の傾き m がいくらのときか．

アプローチ 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=m(x-1)+2$ との交点の x 座標は，$x^2-mx+m-2=0$ の 2 実数解 $x=\dfrac{m\pm\sqrt{m^2-4(m-2)}}{2}$ であるので，面積 S は

$$S=\int_{\frac{m-\sqrt{m^2-4(m-2)}}{2}}^{\frac{m+\sqrt{m^2-4(m-2)}}{2}}\{m(x-1)+2-x^2\}dx$$

で与えられることになりますが，これを実直に計算するのは容易でありません．そこで，積分区間の両端の値が，被積分関数の値を 0 にすることに注目し，B. 504 の公式を用います．



解答 点 A(1, 2) を通る傾き m の直線の方程式は

$$y=m(x-1)+2 \quad \cdots\cdots ②$$

であり，点 A(1, 2) が放物線①の内部にあることから，①，②は m の値によらず 2 点で交わる．

$$f(x)=x^2,\ g(x)=m(x-1)+2$$

とおくと，その 2 交点の x 座標 α，β $(\alpha<\beta)$ は，

$$f(x)-g(x)=x^2-mx+m-2=0 \quad \cdots\cdots ③$$

の 2 実数解であるので

$$f(x)-g(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$$

とかけて，

$$\alpha\leqq x\leqq\beta \text{ では } g(x)\geqq f(x)$$

であるので，

▶ グラフをしっかり描けば，この部分はその図から分かる．

$$S=\int_\alpha^\beta\{g(x)-f(x)\}dx$$

$$=\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(\beta-x)dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

▶ B. 504

ところで，$\alpha+\beta=m$，$\alpha\beta=m-2$ より

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=m^2-4(m-2)$$

となるので，

$$S=\frac{1}{6}\{(m-2)^2+4\}^{\frac{3}{2}}$$

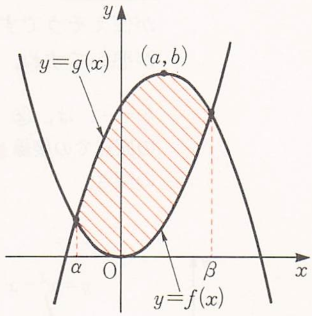
よって，　**$m=2$**　のときに S は最小となる．

▶ 解と係数の関係
☞ 大学への数学 I ニューアプローチ，A1.7 p.14　2 解を引いて $\beta-\alpha$ を求めてもよい．

B. 512

2つの放物線 $y=x^2$ と $y=-(x-a)^2+b$ とによって囲まれる図形の面積が9となるのは，後者の頂点 $(a,\ b)$ がどんな図形上にあるときか．

アプローチ 前問 B. 511 と本質的に同じです．



解答 $f(x)=x^2$，$g(x)=-(x-a)^2+b$ とおくと，

$$f(x)-g(x)=x^2+(x-a)^2-b$$
$$=2x^2-2ax+a^2-b \quad \cdots\cdots ①$$

$y=f(x)$，$y=g(x)$ が図形を囲むための条件は，

$$2x^2-2ax+a^2-b=0 \quad \cdots\cdots ②$$

が相異なる2実数解をもつこと，つまり，

判別式$/4=a^2-2(a^2-b)>0$

$$\therefore\ 2b>a^2 \quad \cdots\cdots ③$$

このもとに，②の2実数解を α，$\beta\ (\alpha<\beta)$ とすれば，①より

$$f(x)-g(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)$$

と書くことができ，

$\alpha \leqq x \leqq \beta$ では $g(x) \geqq f(x)$

であるから，囲む部分の面積が9となる条件は，

$$9=\int_\alpha^\beta \{g(x)-f(x)\}dx=2\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(\beta-x)dx$$
$$=2\cdot\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3$$

$\therefore\ (\beta-\alpha)^3=27 \quad \therefore\ (\beta-\alpha)^2=9$

すなわち，$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=9 \quad \cdots\cdots ④$

である．

α，β は②の解だから，解と係数との関係

$$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=(a^2-b)/2$$

を用いて④を書き直せば，

$$a^2-2(a^2-b)=9 \quad \therefore\ 2b=a^2+9 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

となる．

以上より，③かつ⑤が求める a，b の満たすべき条件であるが，⑤のもとに③は成立する．したがって，面積が9となるのは頂点 $(a,\ b)$ が

放物線 $2y=x^2+9$ 上にあるとき である．

◀ α, β を a, b で表すのではなく，a, b を α, β で表そうとしている．x^2 の係数が2であることに注意．

◀ B. 504

◀ 最後に，α，β を a，b に直す．

B. 513

直線 $y=ax\ (a>0)$ と放物線 $y=x^2-x$ とで囲まれた部分の面積が x 軸と直線 $y=bx\ (b<0)$ とによって3等分されるように a，b の値を求めよ．

アプローチ　放物線と直線とが囲む図形の面積なので，B. 504 の公式が使えそうです．しかし，3つの部分の面積を別々に求めるのは，効率が悪いですね．そこで，ちょっとした工夫をしましょう．

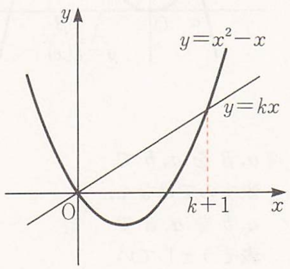
$k=-1$ は，②の原点での接線の傾き．

解答　まず，k を実数として

$y=kx$ ………… ①　$(k>-1)$ と

$y=x^2-x$ ………… ②

とで囲まれた部分の面積 $S(k)$ を求めよう．



①，②の交点の x 座標は，

$$x^2-x=kx$$

$$\therefore\quad x(x-k-1)=0$$

$$\therefore\quad x=0,\ k+1$$

となるから，

$$S(k)=\int_0^{k+1}\{kx-(x^2-x)\}dx$$

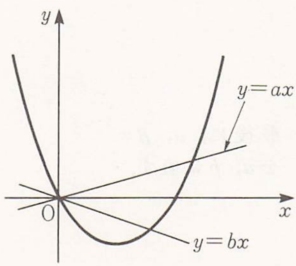
$$=\int_0^{k+1}x(k+1-x)dx$$

B. 504

$$=\frac{1}{6}(k+1)^3$$

となる．

直線 $y=bx$ と x 軸 $(y=0)$ が，直線 $y=ax$ と放物線 $y=x^2-x$ とで囲まれた部分の面積を3等分するのは，



$$S(a):S(0):S(b)=3:2:1$$

$$\therefore\quad \begin{cases} S(a)=\dfrac{3}{2}S(0) \\ S(b)=\dfrac{1}{2}S(0) \end{cases}\qquad \therefore\quad \begin{cases} (a+1)^3=\dfrac{3}{2} \\ (b+1)^3=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

が成り立つときである．これを a，b について解いて

$$\boldsymbol{a=\sqrt[3]{\frac{3}{2}}-1,\quad b=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}-1}$$

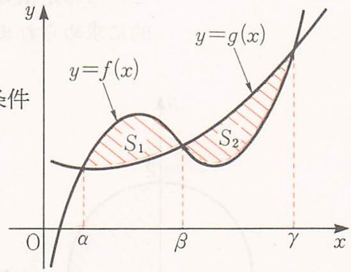
を得る．

B. 514

曲線 $y=x(x-1)^2$ と直線 $y=kx$ とが囲む2つの図形の面積が等しくなるように，定数 $k\,(0<k<1)$ の値を定めよ．

アプローチ たとえば，右図のように，2曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ が $x=\alpha,\ \beta,\ \gamma$ なる3点で交わって2つの図形を囲むときには，2つの面積を S_1，S_2 とすると，

$$S_1=\int_\alpha^\beta\{f(x)-g(x)\}dx,\quad S_2=\int_\beta^\gamma\{g(x)-f(x)\}dx$$



と表されるので，$S_1=S_2$ すなわち，$S_1-S_2=0$ となる条件は

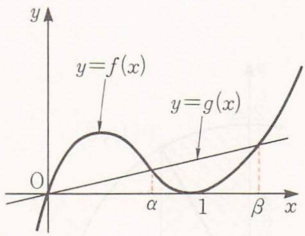
$$\int_\alpha^\beta\{f(x)-g(x)\}dx-\int_\beta^\gamma\{g(x)-f(x)\}dx=0$$

$$\therefore\quad \int_\alpha^\beta\{f(x)-g(x)\}dx+\int_\beta^\gamma\{f(x)-g(x)\}dx=0$$

$$\therefore\quad \int_\alpha^\gamma\{f(x)-g(x)\}dx=0$$ となります．

解答 $\begin{cases} f(x)=x(x-1)^2 \\ g(x)=kx \end{cases}$ とおくと，

$$f(x)-g(x)=x^3-2x^2+(1-k)x$$
$$=x\{x^2-2x+(1-k)\}$$



より，両者の交点の x 座標は $x=0$ および

$$x^2-2x+1-k=0 \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

の2解である．

$0<k<1$ のもとに①は2正数解 α，$\beta\,(\alpha<\beta)$ をもつので，2つの図形の面積が等しくなる条件は，

◀ $\begin{cases} \text{判別式}>0 \\ 2\text{解の和}>0 \\ 2\text{解の積}>0 \end{cases}$ より

$$0=\int_0^\beta\{f(x)-g(x)\}dx=\int_0^\beta\{x^3-2x^2+(1-k)x\}dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{(1-k)x^2}{2}\right]_0^\beta$$

$$\therefore\quad 0=\frac{\beta^2}{12}\{3\beta^2-8\beta+6(1-k)\} \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

◀ β を k で表すと，$\beta=1+\sqrt{k}$ となって面倒．そこで k を β で表すのがよい．

である．ここで，β は①の大きい方の解だから，

$$\begin{cases} \beta^2-2\beta+1-k=0 & \cdots\cdots\cdots ③ \\ \beta>1 & \cdots\cdots\cdots ④ \end{cases}$$

であるので，③を用いて②から，k を消去すると，

$\beta^3(4-3\beta)=0$ となり，④より，$\beta=4/3$

よって，これを③に代入して，

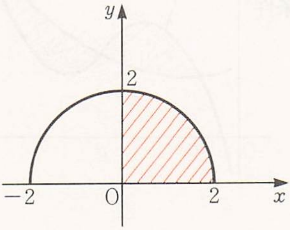
$$k=\beta^2-2\beta+1=\mathbf{\frac{1}{9}}$$ を得る．

B. 515

次の定積分を求めよ．

(1) $I=\int_0^2\sqrt{8-2x^2}dx$　　(2) $J=\int_0^1\sqrt{4-x^2}dx$

アプローチ $\sqrt{8-2x^2}$ などの不定積分は数学IIでは学びませんが，これらの定積分の値は「円の面積」と結びつけることにより初等幾何的に求められます．



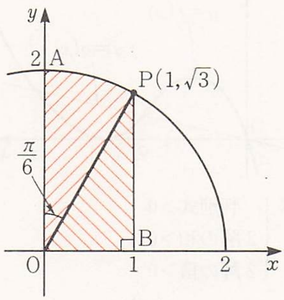
解答 （1） $\sqrt{8-2x^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{4-x^2}$ であり，

$$y=\sqrt{4-x^2} \iff \begin{cases} y^2=4-x^2 \\ y\geqq 0 \end{cases}$$

のグラフは，原点を中心とする半径 2 の半円であるので，

$$I=\int_0^2\sqrt{8-2x^2}dx=\sqrt{2}\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx$$
$$=\sqrt{2}\cdot[\text{左図の 4 分円の面積}]$$
$$=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot2^2=\boldsymbol{\sqrt{2}\pi}$$

となる．



（2） 定積分 J の値は，

半円 $y=\sqrt{4-x^2}$，x 軸，2 直線 $x=0$，$x=1$

で囲まれた部分の面積を表す．

よって，左図のようにこの部分を OP で 2 つの部分に分けると，

$$\angle\text{POA}=30°$$

となるので，

S_1 は円全体の面積の $\frac{1}{12}$ である．

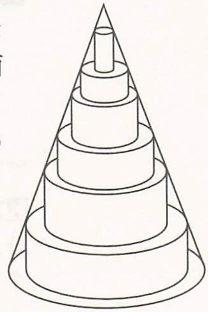
$$\begin{cases} \text{扇形 OAP の面積}\quad S_1=2^2\cdot\pi\times\dfrac{30°}{360°}=\dfrac{\pi}{3} \\ \triangle\text{POB の面積}\quad S_2=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

より

$$J=\int_0^1\sqrt{4-x^2}dx=S_1+S_2=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

を得る．

B. 516



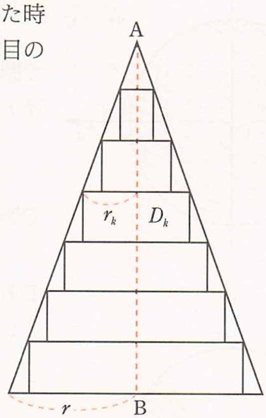
底面の半径が r，高さが h である直円錐の体積を求めたい．高さ AB を n 等分し，各分点を通り底面に平行な平面で円錐を切ると右図のような $(n-1)$ 枚の薄円板ができる．

(1)　右図における $(n-1)$ 枚の薄円板の体積の和 V_n を求めよ．

(2)　薄円板の厚さを限りなく薄くする（n を限りなく大きくする）時，(1)で求めた体積の和は円錐の体積に近づくとして，円錐の体積を求めよ．

アプローチ　体積を求めるには，積分法が有効ですが，その前段階として，ここでは‘区分求積法’という方法で円錐の体積の公式を導いてみましょう．

解答　（1）　円錐を，その軸を含む平面で切った時にできる断面を考える．右図より，上から k 番目の薄円柱 D_k の半径 r_k は　$r_k=\dfrac{kr}{n}$．したがって，



薄円柱 D_k の体積 A_k は

$$A_k=\pi\left(\frac{kr}{n}\right)^2\times\frac{h}{n}$$

である．

$$\begin{aligned}\therefore\quad V_n&=\sum_{k=1}^{n-1}A_k\\&=\sum_{k=1}^{n-1}\pi\left(\frac{kr}{n}\right)^2\times\frac{h}{n}=\frac{\pi r^2h}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2\\&=\frac{\pi r^2h}{n^3}\times\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\\&=\boldsymbol{\frac{\pi r^2h}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)}\qquad\cdots\cdots\cdots①\end{aligned}$$

（2）　n が限りなく大きくなると $\dfrac{1}{n}$ は限りなく小さくなるので，①より，V_n は限りなく $\dfrac{1}{3}\pi r^2h$ に近づく．

$$\therefore\ 〔円錐の体積〕=\boldsymbol{\frac{1}{3}\pi r^2h}$$

［注］　積分法を利用すれば，円すいの体積は

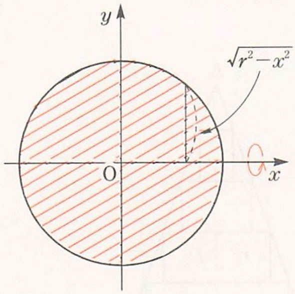
$$\int_0^h\pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2dx=\pi\frac{r^2}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h=\frac{1}{3}\pi r^2h$$

という単純な計算だけで求められる．この方法を次問以下で学ぼう．

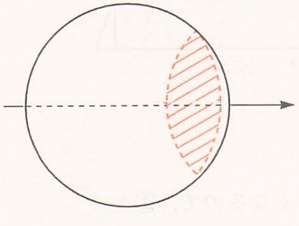
B.517

半径 r の球を，中心から $\frac{1}{2}r$ の距離にある平面で切って 2 つの部分に分ける．このとき，小さい方の立体の体積 V を求めよ．

アプローチ 積分を利用すると，体積が簡単に求められます．この微分・積分の最もおいしい話題は，しかし，教科書ではほとんど扱われません．一流大学を目指す読者のために本書では，このテーマを，敢えて取りあげます．体積を積分で求める際，最も大切なのは，適当な平面で立体を切ったときの切断面を考え，その面積を求めることです．



⇓



解答 球は，円を直径のまわりに回転してできる立体と考えられる．

xy 平面上で，原点を中心とする半径 r の円 C

$$x^2+y^2=r^2$$

で囲まれる図形を，x 軸のまわりに回転すると，半径 r の球ができるが，この球を，

回転軸（$=x$ 軸）に垂直で，中心から x 軸方向に距離 x にある平面

で切断したときの切断面の面積 $S(x)$ は

$$S(x)=\pi(\sqrt{r^2-x^2})^2=\pi(r^2-x^2)$$

である．

したがって求める体積 V は

$$V=\int_{\frac{1}{2}r}^{r}S(x)dx$$

$$=\int_{\frac{1}{2}r}^{r}\pi(r^2-x^2)dx$$

$$=\pi\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{1}{2}r}^{r}=\boldsymbol{\frac{5}{24}\pi r^3}$$

となる．

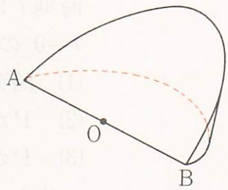
［注］ 球全体の体積は，

$$\int_{-r}^{r}\pi(r^2-x^2)dx=\frac{4}{3}\pi r^3$$

となる．

B. 518

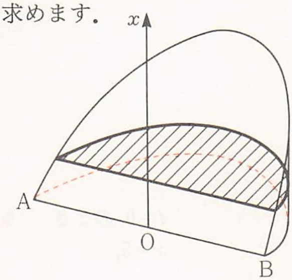
底面の半径が r である直円柱がある．底面の直径ABを含み底面と45°の角をなす平面で直円柱を切り，この平面と直円柱の底面および側面とで囲まれた左図のような立体を作る．



(1)　ABの中点Oを原点とし，OAを x 軸にとる．この時，x＝一定なる平面によるこの立体の切り口の面積 $S(x)$ を x の式で表せ．

(2)　この立体の体積 V を求めよ．

アプローチ　この種の問題では，適当に x 軸を定め，x 軸に垂直な切り口の面積 $S(x)$ を計算し，それを積分して体積 V を求めます．



（方法1）　底面に垂直に x 軸をとった場合．

x 軸に垂直な平面による切り口の弓形の面積 $S(x)$ を x で表す段階で，すでに高校数学の範囲を超えてしまいます．

（方法2）　底面内にABに垂直に x 軸をとった場合．

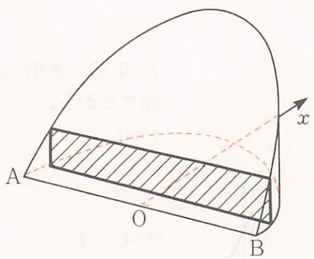
軸に垂直平面による切り口の長方形の面積は

$$S(x)=2x\sqrt{r^2-x^2}$$

ですから，体積は

$$V=\int_0^r S(x)\,dx=2\int_0^r x\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

と表せます．しかし，この定積分の計算は，数学IIの範囲を超えます．



（方法3）　ABを x 軸にとった場合．（本問）

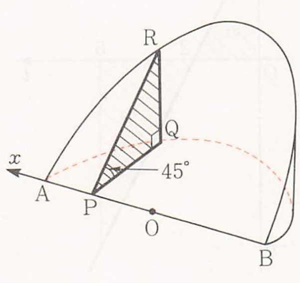
解答　**（1）**　x＝一定なる平面によるこの立体の切り口は，右図のような $PQ=QR=\sqrt{r^2-x^2}$ の直角二等辺三角形である．よって，

$$S(x)=\frac{1}{2}PQ\cdot QR=\frac{1}{2}(r^2-x^2)$$

（2）　切り口が存在する区間は，$-r\leqq x\leqq r$ だから(1)の結果より，求める体積 V は，

$$V=\int_{-r}^r S(x)\,dx=2\int_0^r S(x)\,dx$$

$$=\int_0^r (r^2-x^2)\,dx=\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^r=\frac{2}{3}r^3$$



B. 519

x 軸上を動く動点Pがある．
時刻 t におけるPの速度が $v=4-2t$ であるという．
$t=0$ のとき，Pが $x=5$ なる点から出発するとして，
(1) 時刻 t におけるPの x 座標を求めよ．
(2) Pが原点を通過する時刻を求めよ．
(3) Pが原点を通過するまでに，Pの動いた道のりを求めよ．

アプローチ 変位と道のりに関する基本問題です．

解答 時刻 t におけるPの x 座標を $x=x(t)$ とおく．

(1) 時刻0から時刻 t までの変位は

$$x(t)-x(0)=\int_0^t v\,dt=\int_0^t(4-2t)\,dt=\Big[4t-t^2\Big]_0^t=4t-t^2$$

である．これに，$x(0)=5$ を代入して，

▶ $t=0$ のとき $x=5$.

$$x(t)=\mathbf{5+4t-t^2}$$

(2) Pが原点を通過するのは，$x(t)=0$ となるとき．

$$\therefore\quad 5+4t-t^2=0 \qquad \therefore\quad (t+1)(t-5)=0$$

$t>0$ を考えればよいから，

▶ $t=0$ のとき出発するから，$t\geqq 0$.

$$t=\mathbf{5}$$

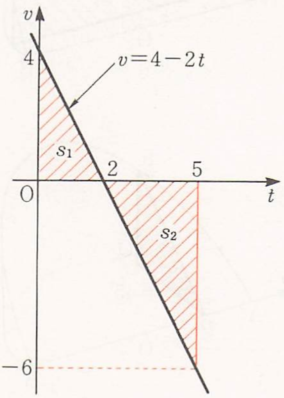
(3) Pの動いた道のり s は，$t=0$ で出発してから $t=5$ までにPが実際に動いた距離であるから，

$$s=\int_0^5|v|\,dt=\int_0^5|4-2t|\,dt$$

ここに，$|4-2t|=\begin{cases}4-2t \cdots\cdots 0\leqq t\leqq 2\\ 2t-4 \cdots\cdots 2\leqq t\leqq 5\end{cases}$

であるので，

$$s=\int_0^2(4-2t)\,dt+\int_2^5(2t-4)\,dt=\Big[4t-t^2\Big]_0^2+\Big[t^2-4t\Big]_2^5=4+9=\mathbf{13}$$



[注] tv 平面で，左図の斜線部の面積を s_1，s_2 とすると，道のり s は $s=s_1+s_2=13$ ということになる．

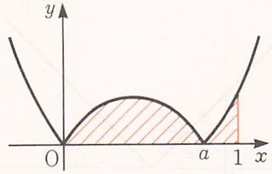
B.520

a を実数とし，$I(a)=\int_0^1|x^2-ax|\,dx$ を考える．

(1)　$I(a)$ を求めよ．

(2)　$I(a)$ を最小にする a の値および，その最小値を求めよ．

アプローチ　被積分関数に絶対値記号を含む定積分は，それをはずさないと計算できません．そこで，$y=|x^2-ax|$ のグラフを利用しましょう．



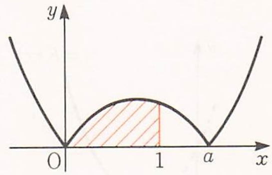
解答　**(1)**　(i)　$0\leqq a\leqq 1$ のとき，

$y=|x(x-a)|$ のグラフと，$x=1$ の位置関係は，右図のようになり，$I(a)$ は斜線部分の面積に相当する．

$$\therefore\quad I(a)=\int_0^a(-x^2+ax)dx+\int_a^1(x^2-ax)dx$$

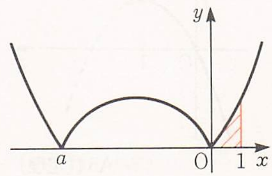
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{a}{2}x^2\right]_0^a+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{a}{2}x^2\right]_a^1$$

$$=2\left(-\frac{a^3}{3}+\frac{a^3}{2}\right)+\frac{1}{3}-\frac{a}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}}$$



(ii)　$a\geqq 1$ のとき，(i)と同様に考えて，

$$I(a)=\int_0^1(-x^2+ax)dx=\boldsymbol{\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}}$$



(iii)　$a\leqq 0$ のとき，

$$I(a)=\int_0^1(x^2-ax)dx=\boldsymbol{-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}}$$

(2)　$I(a)$ は $a\geqq 1$ で増加，$a\leqq 0$ で減少するので，$0\leqq a\leqq 1$ の範囲で最小となる．

$$I'(a)=a^2-\frac{1}{2}$$

$$=\left(a-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(a+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

a	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
$I'(a)$		$-$	0	$+$	
$I(a)$		↘		↗	

より，$I(a)$ は，$0\leqq a\leqq 1$ で右のように増減するので，$a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のときに，$I(a)$ は

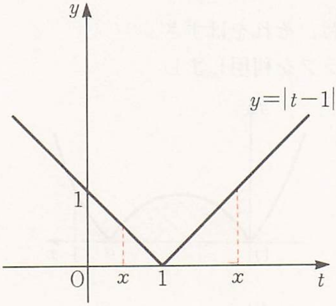
$$\text{最小値}=I\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\boldsymbol{\frac{2-\sqrt{2}}{6}}$$

をとる．

B.521

$F(x)=2\int_0^x|t-1|\,dt$ のグラフを描け．

アプローチ 前問同様，絶対値をはずすことを考えます．その際，$y=|t-1|$ のグラフを考えるとよいでしょう．



解答 $y=|t-1|=\begin{cases} t-1 & (t\geqq 1) \\ -t+1 & (t\leqq 1)\end{cases}$

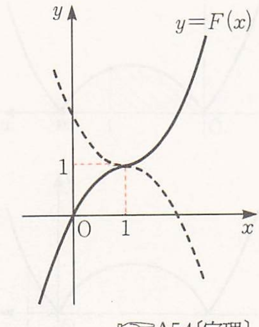
のグラフは，左図のような折れ線になる．

これより，x と 1 の大小で分類すれば，絶対値記号がはずせる．

i ）$x\leqq 1$ のとき，

$0\leqq t\leqq x$ では，$|t-1|=1-t$ であるので，

$$F(x)=2\int_0^x(1-t)dt$$
$$=2\left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^x=-x^2+2x$$



ii ）$x\geqq 1$ のとき，

$|t-1|=\begin{cases} 1-t & (0\leqq t\leqq 1) \\ t-1 & (1\leqq t\leqq x)\end{cases}$ であるので，

$$F(x)=2\int_0^1(1-t)dt+2\int_1^x(t-1)dt$$
$$=2\left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^1+2\left[\frac{t^2}{2}-t\right]_1^x$$
$$=x^2-2x+2$$

以上より，左の $y=F(x)$ のグラフを得る．

☞A5.4〔定理〕

別解 与式は次の 2 式と同値である．

絶対値がはずれたので，これを積分すればよい．▶

$$\begin{cases} F'(x)=2|x-1|=\begin{cases} 2-2x \cdots\cdots x\leqq 1 \\ 2x-2 \cdots\cdots x\geqq 1\end{cases} & \cdots\cdots ① \\ \text{かつ}\quad F(0)=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①を積分すると，C_1，C_2 を定数として，

$$F(x)=\begin{cases} 2x-x^2+C_1 \cdots\cdots x\leqq 1 \\ x^2-2x+C_2 \cdots\cdots x\geqq 1\end{cases} \quad\cdots\cdots ③$$

$x\leqq 1$ のときの式で $x=0$ とおく．▶

まず，②を考えて，　$F(0)=C_1=0$

また，$x=1$ のときを考え，$F(1)=1+C_1=-1+C_2$

この 2 つから，$C_1=0$，$C_2=2$ と定まるので，

$$F(x)=\begin{cases} 2x-x^2 \cdots\cdots x\leqq 1 \\ x^2-2x+2 \cdots\cdots x\geqq 1\end{cases}$$ を得る．

B.522

(1)　$F(x)=\int_0^x t(t-1)^2(t-2)^3 dt$ の増減を調べ，$F(x)$ を極大，極小にする x の値を求めよ．

(2)　$G(x)=\int_1^x (t^2-xt+1)dt$ のとき，$G'(x)$ を求めよ．

アプローチ　(1)　$F(x)$ の極大値，極小値を求めるためには，定積分を実行して $F(x)$ を具体的に計算しなければなりませんが，$F(x)$ を極大・極小とする値を求めるだけなら，$F'(x)$ がわかればよいわけです．したがって，**微積分学の基本定理** $\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x)$ を利用すれば，積分を実行しなくても $F'(x)$ が求められます．

(2) "$G(x)=\int_a^x f(t)dt \Longrightarrow G'(x)=f(x)$"の関係は，$f(t)$ が x を含む場合には一般に成立しないので，$G'(x)=x^2-x\cdot x+1=1$ とするわけにはいきません．

解答　(1)　$F'(x)=x(x-1)^2(x-2)^3$

これより，増減表は右のようになる．

x		0		1		2	
$F'(x)$	+	0	−	0	−	0	+
$F(x)$	↗		↘		↘		↗

よって，$F(x)$ を

極大にする x の値は　$\boldsymbol{x=0}$

極小にする x の値は　$\boldsymbol{x=2}$　である．

(2)　$G(x)=\left[\frac{t^3}{3}-\frac{xt^2}{2}+t\right]_1^x$

$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^3}{2}+x\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{2}+1\right)$

$=-\frac{x^3}{6}+\frac{3x}{2}-\frac{4}{3}$

$\therefore\quad \boldsymbol{G'(x)=-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}}$

［注］(2)では，積分して $G(x)$ を具体的に求めなくても，

$G(x)=\int_1^x (t^2+1)dt-x\int_1^x t\,dt$ と，x を積分記号の外へ追い出すことができれば，(1)と同様に，次のように計算できる．

$\therefore\quad G'(x)=(x^2+1)-\left\{\int_1^x t\,dt+x\cdot x\right\}$

$=1-\int_1^x t\,dt=1-\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^x=\boldsymbol{\frac{1}{2}(3-x^2)}$

◀ $x\int_1^x t\,dt$ を微分するのに積の微分法(A4.7)を用いた．

B.523

次の各項を満たす整式 $f(x)$ をそれぞれ求めよ．

(1)　任意の x に対し，$f(x)=x-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

(2)　任意の x に対し，$f(x)=x+\displaystyle\int_{-1}^1 (x^2t+xt^2)f(t)\,dt$

アプローチ $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ は積分の上端，下端が定数なので，この定積分は x によらない定数です．

解答　(1)　$\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=C$　……①

（C は定数）

とおくと，与えられた等式により，

$$f(x)=x-C \quad \cdots\cdots②$$

となる．

②を①に代入すると，

$$C=\frac{1}{2}\int_0^1 (x-C)\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-Cx\right]_0^1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-C\right)$$

∴　$C=\dfrac{1}{6}$ となるので，$\boldsymbol{f(x)=x-\dfrac{1}{6}}$

与式の形から，$f(x)$ の形がきまる．

(2)　与式を書き直すと，

$$f(x)=x^2\int_{-1}^1 tf(t)\,dt+x\left\{1+\int_{-1}^1 t^2f(t)\,dt\right\} \quad \cdots\cdots①$$

積分変数 t に対し，x は定数

右辺に現れる定積分は定数だから，

$$f(x)=ax^2+bx \quad (a,\ b \text{ は定数}) \quad \cdots\cdots②$$

①式の形から，$f(x)$ の形がきまる．

とおくことができる．よって，これが，

$$a=\int_{-1}^1 tf(t)\,dt \ \cdots\cdots③,\quad b=1+\int_{-1}^1 t^2f(t)\,dt \ \cdots\cdots④$$

を満たすように定数 a，b を定めればよい．

②を③，④に代入し，

$$a=\int_{-1}^1 (at^3+bt^2)\,dt=2\int_0^1 bt^2\,dt=\frac{2}{3}b \quad \cdots\cdots⑤$$

B.503

$$b-1=\int_{-1}^1 (at^4+bt^3)\,dt=2\int_0^1 at^4\,dt=\frac{2}{5}a \quad \cdots\cdots⑥$$

⑤，⑥は a，b の連立1次方程式．

⑤，⑥より，$a=10/11$，$b=15/11$ となるので，

$\boldsymbol{f(x)=\dfrac{10}{11}x^2+\dfrac{15}{11}x}$　を得る．

B. 524

(1)　等式 $\int_a^x f(t)\,dt = x^3+x^2-x-1$ ……… Ⓐ

を満たす x の整式 $f(x)$ と，実数 a の値を求めよ．

(2)　x の整式 $f(x)$ で，等式

$$\int_1^x f(t)\,dt = xf(x)-\frac{2}{3}x^3+x^2-\frac{1}{3} \quad \cdots\cdots\cdots \text{Ⓑ}$$

を満たすものを求めよ．

アプローチ　前問 B.523 とは異なり，$\int_1^x f(t)\,dt$ は x の関数です．そこで，B.522 と同様に“微積分学の基本定理”を用いて等式の両辺を x で微分します．

解答　(1)　Ⓐの両辺を x で微分すると，

$$\boldsymbol{f(x)=3x^2+2x-1}$$

となり，また，Ⓐにおいて，$x=a$ とおくと，

$$0=a^3+a^2-a-1$$

◀ $\int_a^a f(t)\,dt=0$

$$\therefore\ (a+1)^2(a-1)=0$$

$$\therefore\ \boldsymbol{a=\pm 1}$$

となる．

(2)　Ⓑの両辺を x で微分すると，

$$f(x)=\{f(x)+xf'(x)\}-2x^2+2x$$

◀ $\{xf(x)\}'=(x)'f(x)+xf'(x)$ [積の微分法] (A4.7)

$$\therefore\ xf'(x)=2x^2-2x$$

となり，これが任意の x について成り立つことから，

$$f'(x)=2x-2$$

$$\therefore\ f(x)=x^2-2x+C \quad (C\ は積分定数)$$

を得る．

一方，Ⓑにおいて，$x=1$ とおくと，

$$f(1)=0$$

となるので，$C=1$．

ゆえに，求める $f(x)$ は

$$\boldsymbol{f(x)=x^2-2x+1}$$

である．

B.525

x の整式 $f(x)$ で，等式

$$f(x)f'(x)+\int_1^x f(t)\,dt=\frac{4}{9}x-\frac{4}{9} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (*)$$

を満たすものをすべて求めよ．

アプローチ $f(x)$ が整式なのでその次数を決定しましょう．

解答 $f(x)$ を n 次の整式とする．

1） $n=0$ のとき，$f(x)=a$（定数）とおくと，

$f^{1}(x)=0$ ▶

$$(*) \Longleftrightarrow a(x-1)=\frac{4}{9}x-\frac{4}{9} \quad \therefore \quad a=\frac{4}{9}$$

2） $n\geqq 1$ のとき，

$f'(x)$ は $n-1$ 次式． ▶

$$\begin{cases} f(x)f'(x) \text{ は，} 2n-1 \text{ 次式} \\ \int_1^x f(t)\,dt \text{ は } n+1 \text{ 次式} \end{cases}$$ であるので，

$2n-1$ と $n+1$ の大小を比較する．

i） $2n-1<n+1$ すなわち $n=1$ のとき，

$(*)$ の左辺は $n+1\,(=2)$ 次式となるので，

$(*)$ は成立しえない．

ii） $2n-1>n+1$ すなわち $n\geqq 3$ のとき，

$(*)$ の左辺は $2n-1\,(\geqq 5)$ 次式となるので，

$(*)$ は成立しえない．

次数が決まった． ▶ ゆえに，$n=2$ でなければならない．そこで

$$f(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0) \cdots\cdots\cdots ①$$

とおき，$(*)$ の左辺を計算すると，

$$\left(2a^2+\frac{a}{3}\right)x^3+\left(3ab+\frac{b}{2}\right)x^2$$

$$+(b^2+2ac+c)x+\left(bc-\frac{a}{3}-\frac{b}{2}-c\right)$$

となるから，等式 $(*)$ が成り立つことは

$2a^2+a/3=0$ ……②，$3ab+b/2=0$ ……③

$b^2+2ac+c=\dfrac{4}{9}$…④，$bc-\dfrac{a}{3}-\dfrac{b}{2}-c=-\dfrac{4}{9}$…⑤

各自計算せよ． ▶ が成り立つことと同値である．①～⑤を連立して，

a，b，c の値を求め，次の答を得る．

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{4}{9},\ -\frac{1}{6}x^2+x-\frac{5}{6},\ -\frac{1}{6}x^2\pm\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}}$$

B. 526

任意の高々１次関数 $f(x)=px+q$ に対して，

$\int_{-1}^{1} f(x)P(x)dx=0$ ………① となるような２次関数

$P(x)$ を求めよ．ただし，$P(x)$ の x^2 の係数は１とする．

アプローチ $f(x)=px+q$ を①に代入した式が，任意の p，q について成り立つ条件を考えます．

解答 $f(x)=px+q$ を①に代入すると，

$$p\cdot\int_{-1}^{1} xP(x)dx+q\cdot\int_{-1}^{1} P(x)dx=0 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

となるので，②が任意の p，q について成り立つ条件を求める．

いま，$I_1=\int_{-1}^{1} xP(x)dx$，$I_0=\int_{-1}^{1} P(x)dx$

とおくと，②が $(p,\ q)=(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$ のときに成り立つことから，

$$I_1=I_0=0 \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

であることが必要になる．　◀必要性

逆に，$P(x)$ が③を満たせば，任意の p，q について，$p\cdot I_1+q\cdot I_0=0$ となり②が成り立つ．　◀十分性

よって，③を満たす２次関数 $P(x)$ を求めればよい．

そこで，$P(x)=x^2+ax+b$ とおき，③に代入すると，

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1}(x^3+ax^2+bx)dx=2\int_{0}^{1}ax^2dx=0 \\ \int_{-1}^{1}(x^2+ax+b)dx=2\int_{0}^{1}(x^2+b)dx=0 \end{cases}$$

$\therefore$ $a=0$ かつ $b=-\dfrac{1}{3}$ を得る．

よって，求める $P(x)$ は

$$P(x)=x^2-\frac{1}{3}$$

である．

［注］ 上の解答では，任意の p，q について，$pI_1+qI_2=0$ が成り立つ条件を厳密に，必要性と十分性とに分けて考えている．

Repos

円 周 率

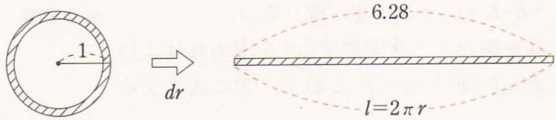
$\pi=3.141592\cdots$ は，その名の通り，円の円周と直径との比の値ですが，この定数を用いれば，円と直径上の正方形の面積比も表せる（$\pi:4$）ことを厳密に証明したのは，かのアルキメデスでした．

ところで，微分法の初歩の知識があれば，2つの公式

$$l=2\pi r \qquad \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

$$S=\pi r^2 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

の間の関係を見破るのは，簡単ですね．すなわち，(2)を，r で微分すると(1)が得られる，ということです．円の面積 S を，半径 r の関数と見れば，r が無限小量 dr だけ増加したときの S の増分 ds が，円周 l と dr を2辺とする長方形の面積になる（つまり $ds=l\times dr$）といいかえれば，いかにもそうだ，という気がしてきませんか？



この考え方を高次元化すると，球の表面積 $S=4\pi r^2$ と体積 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ の関係が出てきます．



§6　発展問題

本セクションでは，内容が数学IIのいくつかの単元にまたがる問題，あるいは，各単元の深い理解と粘り強い思考が要求される問題を扱う．独力で解決できなくとも，解答を熟読してしっかり理解できれば，著者達の意図は達成される．難解であれば，初読の際は読みとばす手もあろう．



B.601

動点P，Q，Rがそれぞれ

放物線　$y=x^2$　………　①

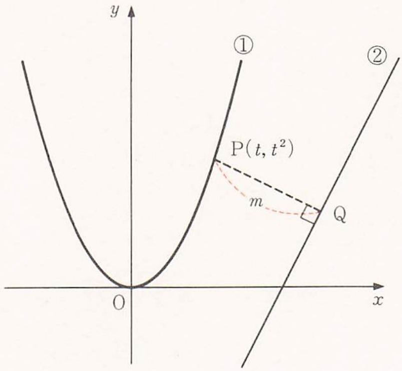
直線　$y=2x-6$　………　②

円　$(x+3)^2+y^2=1$　………　③　上を動くとする．

(1) 線分PQの長さの最小値を求めよ．

(2) 線分PRの長さの最小値を求めよ．

アプローチ　“2曲線の最短距離”を求める問題です．2点を同時に動かすと，頭がクラクラしてよく分かりません．まず，一方を固定して考えてみましょう．



解答

(1)　放物線①上の点P$(t,\ t^2)$を固定して，まず，直線②上の点Qだけを動かすときのPQの最小値をmとおくと，mは

$$m=\begin{pmatrix}\text{点P}(t,\ t^2)\text{から}\\ \text{直線②に至る距離}\end{pmatrix}$$

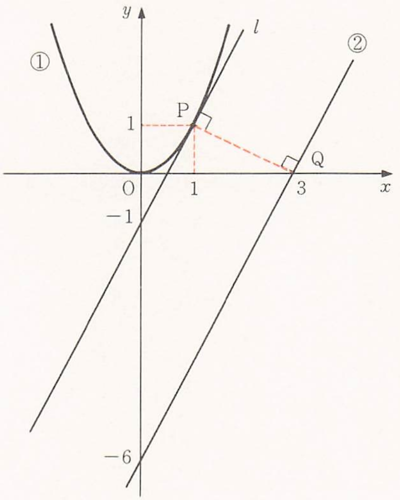
$$=\frac{|2t-t^2-6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|-(t-1)^2-5|}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\{(t-1)^2+5\}$$

となる．次に，Pを動かす（つまり，tを変化させる）と，mは，$t=1$のとき

最小値$=\sqrt{5}$

をとる．



［注］「下に凸な放物線の図形的性質に注目して，次のように解くこともできる．

別解

直線②に平行な直線　$l：y=2x+k$　……④

が，放物線①に接するのは，①，④からyを消去したxの2次方程式

$x^2-2x-k=0$　………　⑤

が重解をもつとき，つまり，

判別式$/4=1+k=0$

$\therefore\quad k=-1$

のときで，この下で⑤の重解は $x=1$ となり，放物線①と直線④との接点の座標は，(1，1) である．

よって，点 (1，1) から直線②に至る距離

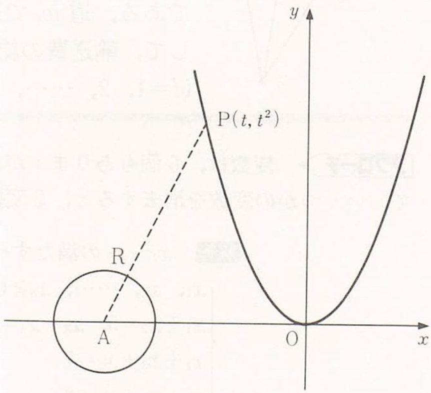
$$\frac{|2-1-6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$$

が PQ の最小値となる．

（2）円③の中心を A$(-3,\ 0)$ とする．

放物線①上の点 P$(t,\ t^2)$ を固定すると，線分 PA と円③との交点に R が来たとき，PR は最小値 AP-1 をとる．よって AP を最小とすればよい．

ところで P を動かすと，点 P における放物線①の接線が直線 AP と直交するとき，すなわち，放物線①の法線が A$(-3,\ 0)$ を通るとき，AP は最小となる．



P$(t,\ t^2)$ における放物線①の接線の傾きは $2t$ である．

［2 次方程式 $x^2=m(x-t)+t^2$ が重解をもつ m の値を求めればよい．］

◁数学IIの微分法を用いると一瞬にして，
$m=2t$
がわかる．

ゆえに，P$(t,\ t^2)$ における放物線①の法線は，

$$2t(y-t^2)+(x-t)=0$$

で表される．これが A$(-3,\ 0)$ を通るときの実数 t の値を求めると，

$\therefore\quad 2t^3+t+3=0\quad \therefore\quad (t+1)(2t^2-2t+3)=0$

$\therefore\quad t=-1$　　である．

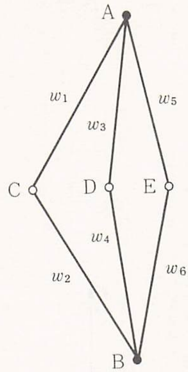
ゆえに，P$(-1,\ 1)$ のとき，AP は最小値$=\sqrt{5}$ をとる．したがって，

◁PA$-$円③の半径

PR の最小値$=\sqrt{5}-1$

となる．

B.602



石油が倉庫Aに7 kl，倉庫Bに8 klある．これを販売店C, D, Eにそれぞれ5 kl，6 kl，4 klずつ運びたい．倉庫から販売店へは，図のような道 w_i $(i=1, 2, \cdots\cdots, 6)$ で運ぶとし，道 w_i による輸送費を1 klあたり a_i 円とすると，

$a_1=4$，$a_2=5$，$a_3=7$

$a_4=10$，$a_5=5$，$a_6=9$

である．道 w_i で運ぶ石油の量を x_i kl として，輸送費の総額Mを最小にする x_i $(i=1, 2, \cdots\cdots, 6)$ を求めよ．

アプローチ 変数は，6個もありますが，与えられた拘束条件を使って，いくつかの変数を消去すると，2変数関数に帰着されます．

解答 x_1～x_6 の満たすべき条件は，

$$\begin{cases} x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_6 \geqq 0 & \cdots\cdots\cdots ① \\ x_1+x_2=5,\ x_3+x_4=6,\ x_5+x_6=4 & \cdots\cdots\cdots ② \\ x_1+x_3+x_5=7 & \cdots\cdots\cdots ③ \\ x_2+x_4+x_6=8 & \cdots\cdots\cdots ④ \end{cases}$$

である．

x_1 と x_3 でなくてもよいが. ▶ x_1，x_3 を用いて他の変数を表す．

②，③より　$x_2=5-x_1$，$x_4=6-x_3$，

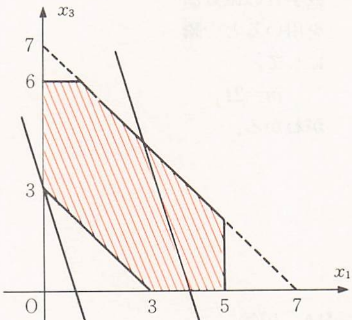
$x_5=7-x_1-x_3$，$x_6=x_1+x_3-3$

これらを①，④に代入すると，①は

$0 \leqq x_1 \leqq 5$，$0 \leqq x_3 \leqq 6$，$3 \leqq x_1+x_3 \leqq 7$

となり，④は必然的に成立する．また，

$$M=4x_1+5x_2+7x_3+10x_4+5x_5+9x_6$$
$$=3x_1+x_3+93$$



であり，左図において斜線部と直線 $3x_1+x_3=k$ が共有点をもつ条件を考えると，kが最小になるのは直線が $(0, 3)$ を通るときである．

$\therefore$ **$x_1=0$，$x_3=3$**

$\therefore$ **$x_2=5$，$x_4=3$，$x_5=4$，$x_6=0$**

［注］ x_1，x_6 を用いて他の変数を表すと，結果的に簡単になる．

B.603

p が不等式 $p<\dfrac{1}{2}$ を満たし，かつ 2 次方程式

$$x^2+2px-p=0 \quad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$

が実数解 α，β をもつとき，点 $(\alpha,\ \beta)$ の存在範囲を図示せよ．

アプローチ パラメタで表される動点の軌跡の変種です．解の公式で解くことはできるけれど……．求めたいのは α，β を p で表すことではなく，α，β との間に成り立つ関係式です．

解答 解と係数の関係から

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-2p & \cdots\cdots\cdots \text{②} \\ \alpha\beta=-p & \cdots\cdots\cdots \text{③} \end{cases}$$

が成立する．よって点 $(\alpha,\ \beta)$ が求める軌跡上にあるための条件は，②，③および

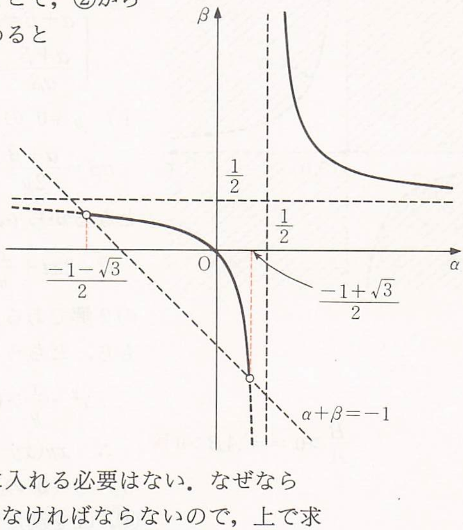
$$p<\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots\cdots \text{④}$$

を満たす p が存在することである．そこで，②から定まるPが③，④を満たす条件を求めると

$$\begin{cases} \alpha\beta=\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \\ -\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)<\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} \beta=\dfrac{\alpha}{2\alpha-1} \\ \alpha+\beta>-1 \end{cases}$$

となり，これを $\alpha\beta$ 平面に図示して右図を得る．



［注］ ①の実数解条件は

$p^2+p\geqq 0$

$\therefore$ $p\leqq -1$ または $p\geqq 0$

であるが，今の場合この条件を考慮に入れる必要はない．なぜなら上の点に対応する α，β は，実数でなければならないので，上で求めた範囲に

$$p\leqq -1 \quad \text{または} \quad p\geqq 0$$

に反するものが含まれることはあり得ないからである．

☞ B.126［注］

B.604

双曲線 $xy=1$ 上の2点を結ぶ線分の中点となるような点の全体の集合を求めよ．

アプローチ 2点P，Qが決まれば，その中点Mが決まり，P，Qが双曲線上を動いたときのMの存在範囲，というわけです．B.130を思い出しましょう．

解答 双曲線 $xy=1$ 上の2点 $\left(\alpha,\ \dfrac{1}{\alpha}\right)$, $\left(\beta,\ \dfrac{1}{\beta}\right)$ を結ぶ線分の中点Mの座標 $(x,\ y)$ は

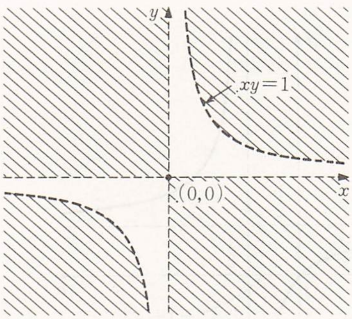
$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta) & \cdots\cdots\text{①} \\ y=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right) & \cdots\cdots\text{②} \end{cases}$$

で与えられるから，α，β が

$$\alpha\neq\beta \text{ かつ } \alpha\neq0,\ \beta\neq0 \quad \cdots\cdots\text{③}$$

を満たして動くとき，①，②で定まる点 $(x,\ y)$ の存在範囲を求めればよい．①，②は次のように書ける．

$$\begin{cases} \alpha+\beta=2x & \cdots\cdots\text{④} \\ \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=2y & \cdots\cdots\text{⑤} \end{cases}$$



i） $y\neq0$ のとき，④，⑤より

$$\alpha\beta=\frac{\alpha+\beta}{2y}=\frac{x}{y}$$

となるから α，β は2次方程式

$$t^2-2xt+\frac{x}{y}=0$$

の2解である．この方程式が異なる2つの実数解をもち，どちらも0でない条件は，

$$x^2-\frac{x}{y}>0 \text{ かつ } \frac{x}{y}\neq0$$

$\dfrac{B}{A}>0 \iff AB>0$ ▶

$$\therefore\quad xy(xy-1)>0$$

ii） $y=0$ のとき，⑤は $\alpha+\beta=0$ となるから，③，④，⑤を満たす α，β が存在する条件は $x=0$ である．

以上により，中点Mの存在範囲は

$\boldsymbol{xy(xy-1)>0}$ **または** $\boldsymbol{x=y=0}$ となる（上図）．

B.605

3点 O(0, 0), A(4, 0), B(0, 4) を頂点とする3角形の辺OA上に点P, 辺OB上に点Qがある．△OPQの面積が△OABの面積の $\frac{1}{4}$ となるようにP, Qが動くとき，線分PQの通る範囲を求めよ．ただし，P, Qは各辺の端点に一致しないものとし，線分PQはその端点P, Qを含まないものとする．

アプローチ　まず直線PQの方程式を作ります．P, Qの動きには限界があることも忘れないようにしましょう．

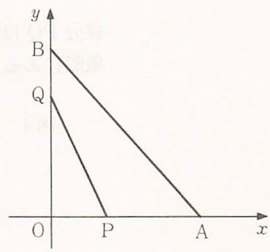
解答　P$(a,\ 0)$, Q$(0,\ b)$ とおくと，a, b は

$$\begin{cases} \frac{1}{2}ab=2 \\ 0<a,\ b<4 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} b=\frac{4}{a} & \cdots\cdots ① \\ 1<a<4 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

を満たしながら動く．このとき直線PQは

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad \therefore \quad \frac{x}{a}+\frac{ay}{4}=1 \quad \cdots\cdots ③$$

図1



と表せるから，a が②の範囲を動くとして，直線③の通過範囲を求める．条件②の下で③は

◀ ② は $a \neq 0$ を意味する．

$$ya^2-4a+4x=0 \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

と変形できるので，②，④を満たす a の存在条件を求める．以下において，④の左辺を $f(a)$ とする．

i）②，④を満たす a が2つ存在する（重解を含む）条件は，図2により

$$\begin{cases} f(1)>0,\ f(4)>0 \\ 1<\frac{2}{y}<4 \\ 4-4xy \geqq 0 \end{cases}$$

◀ 端点の符号
◀ 対称軸の位置
◀ ④の判別式

$$\therefore \begin{cases} 4x+y>4,\ x+4y>4 \\ \frac{1}{2}<y<2 \\ xy \leqq 1 \end{cases}$$

ii）②，④を満たす a が1つ存在する条件は，図3により，

$$f(1)f(4)<0$$

$$\therefore \quad (4x+y-4)(x+4y-4)<0 \text{ である．}$$

図 2

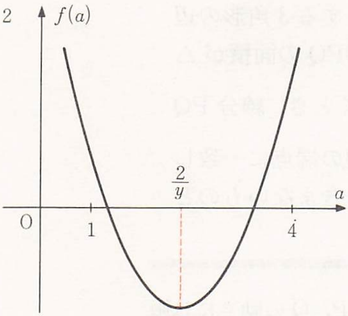
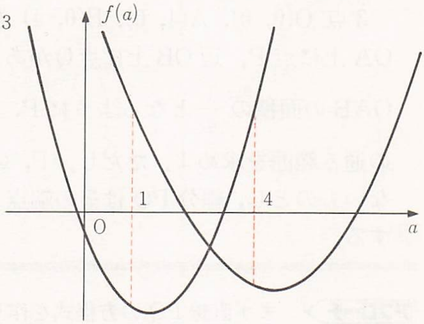


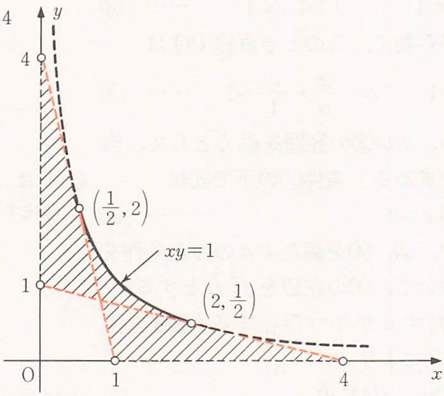
図 3



線分 PQ は第 1 象限にある．

▶　以上の結果を $x>0$，$y>0$ の範囲で図示すると，図 4 のようになる．

図 4



[注]　1°　直線③は双曲線 $xy=1$ に接しながら動いている．また接点 $\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{2}{a}\right)$ は，a が③を満たすとき，$\dfrac{1}{2}<x<2$ の範囲にある．

2°　次のような考え方もある．x を固定して a を動かすとき，③で与えられる y の値域を調べれば，図 4 の斜線部と直線 $x=$一定 の共通部分が得られるはずである．そこで，③を y について解き

$$y=-\frac{4x}{a^2}+\frac{4}{a}$$

とすると，y は $\dfrac{1}{a}$ の 2 次関数となるので値域を求めることができる．この方法は B.143 にも適用することができる．

B.606

放物線 $y=x^2$ 上を動く点Pがある．Pを中心とし x 軸に接する円の内部が通過する範囲を図示せよ．

アプローチ B.142，143 および前問 B.605 で学んだ通過範囲の問題の仕上げです．

解答 Pの座標を $(t,\ t^2)$ とすると，円の内部は

$$(x-t)^2+(y-t^2)^2<t^4 \quad \cdots\cdots \ ①$$

◀半径は t^2

と表せる．点 $(x,\ y)$ が求める範囲に属するための条件は，①を満たす実数 t が存在することである．

①を整理した次式の左辺を $f(t)$ とおく．

$$(1-2y)t^2-2xt+x^2+y^2<0 \quad \cdots\cdots \ ②$$

i）$y=\dfrac{1}{2}$ のとき，$f(t)=-2xt+x^2+\dfrac{1}{4}$ となるから，②を満たす t が存在する条件は，$x \neq 0$．

◀$x=0$ なら，$f(t)=\dfrac{1}{4}>0$

ii）$y<\dfrac{1}{2}$ のとき，$1-2y>0$ だから，②を満たす t が存在する条件は，2次方程式が2つの異なる実数解をもつことであり，

$$x^2-(1-2y)(x^2+y^2)>0$$

◀②の判別式>0

$$\therefore\quad y(2x^2+2y^2-y)>0.$$

iii）$y>\dfrac{1}{2}$ のとき，②を満たす t は必ず存在する．

以上により，②を満たす t の存在条件は，

$y=\dfrac{1}{2}$ かつ $x \neq 0$

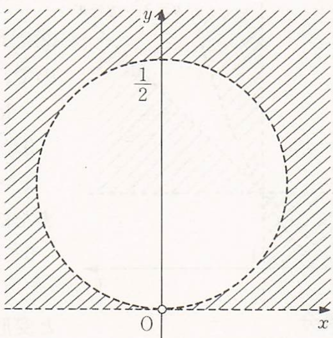
または

$y<\dfrac{1}{2}$ かつ $y(2x^2+2y^2-y)>0$

または

$y>\dfrac{1}{2}$

となり，これを図示すると右のようになる．



B.607

(1)　不等式 $t+\dfrac{2}{t}>3$ を解け.

(2)　次の不等式が表す領域を図示せよ.

$$\log_x y+2\log_y x>3$$

アプローチ　(1)では分母を払うために，両辺に t^2 をかけます．$t^2>0$ だからです．(2)では，底をそろえます．

解答　(1)　$t+\dfrac{2}{t}>3$ の両辺に t^2 をかけて分母を払うと　$t^3+2t-3t^2>0$

$t(t-1)(t-2)>0$

ところで，3つの数の積が正となるのは，全て正であるか2数が負で最大数が正の場合である．

$t>t-1>t-2$ であるから，上式が成り立つのは

$t-2>0$ または $t>0>t-1$

すなわち，

$t>2$ または $0<t<1$

の場合である．

(2)　まず，真数と底の条件から，x，y は

$x>0$，$x\neq1$，$y>0$，$y\neq1$　………　①

を満たさなければならない．

この条件のもとで，底を x にそろえると

$\log_x y+\dfrac{2}{\log_x y}>3$　………　②

②において $\log_x y=t$ とおくと，(1)の不等式となるので，その解は，

$\log_x y>2$ または $0<\log_x y<1$　………　②′

$0<x<1$；$1<x$ と場合分けして考えると，②′は，

$x>1$ かつ $(1<y<x$ または $y>x^2)$

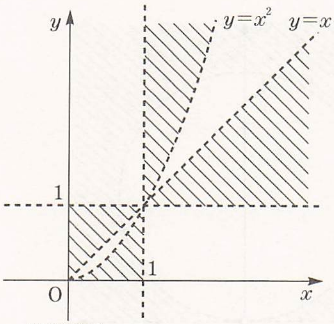
または

$0<x<1$ かつ $(x<y<1$ または $y<x^2)$

………　②″

と変形できる．

①かつ②″を図示すると左図のようになる．



斜線部分
ただし，境界線は含まない．

B.608

k を与えられた実数の定数とするとき,

$$\cos^2 x+\sin x+k=0 \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす x　$(0\leqq x<2\pi)$　の実数値の個数を求めよ.

アプローチ この手の問題は,旧課程では,"必修の難問"でした.弧度法が排除された新課程では出題しにくくなりましたが,教育的価値を考えて,敢えて取り組んでもらうことにしました.

解答 $\sin x=X$　$\cdots\cdots\cdots$ ②

とおくと,方程式①は,X についての方程式

$$X^2-X-1=k \qquad \cdots\cdots\cdots ③$$

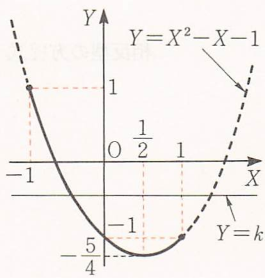
になる.対応②を考慮すると,方程式①を満たす実数 $x\,(0\leqq x<2\pi)$ の値は,方程式③を満たす実数 X に対し,

i)　$-1<X<1$　なるものに対しては　2個ずつ
ii)　$X=\pm1$　　なるものに対しては　1個ずつ

◀ここが本問解決の急所.

対応し,それ以外の X に対しては,1つも対応しない.

そこで,③の実数解で,i)　$-1<X<1$　なるものの個数 n_1,ii)　$X=\pm1$　なるものの個数 n_2 を求めるために XY 平面上の放物線 $Y=X^2-X-1$ と,直線 $Y=k$ の共有点を考えると,右図より,



$k<-5/4$	のとき,	$n_1=0$, $n_2=0$
$k=-5/4$	のとき,	$n_1=1$, $n_2=0$
$-5/4<k<-1$	のとき,	$n_1=2$, $n_2=0$
$k=-1$	のとき,	$n_1=1$, $n_2=1$
$-1<k<1$	のとき,	$n_1=1$, $n_2=0$
$k=1$	のとき,	$n_1=0$, $n_2=1$
$k>1$	のとき,	$n_1=0$, $n_2=0$

求める x の実数値の個数は,$2n_1+n_2$ であるから,

$k<-5/4$ または $k>1$	**のとき**	**0個**
$k=1$	**のとき**	**1個**
$k=-5/4$ または $-1<k<1$	**のとき**	**2個**
$k=-1$	**のとき**	**3個**
$-5/4<k<-1$	**のとき**	**4個**

B.609

(1)　次の等式を示せ．ただし θ_1，θ_2 は実数，$i=\sqrt{-1}$ である．

$$(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$
$$=\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)$$

(2)　$(\cos 72^\circ+i\sin 72^\circ)^5=1$ が成り立つことを示せ．

(3)　(2)を利用して $\cos 72^\circ$ の値を求めよ．

複素数の計算法については，☞ 数学B

解答　**(1)**　複素数の積の定義と，加法定理から

$$(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$
$$=\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)$$
$$=\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)$$ ■

「ド・モアブル(de Moivre)の定理」と呼ばれる．

(2)　(1)で示したことから，任意の自然数 n について　$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

が成り立つ．したがって，

$$(\cos 72^\circ+i\sin 72^\circ)^5=\cos 360^\circ+i\sin 360^\circ=1$$ ■

(3)　$\alpha=\cos 72^\circ+i\sin 72^\circ$ とおくと，(2)で示したように，$\alpha^5=1$　$\therefore$　$(\alpha-1)(\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)=0$

相反型の方程式

$\alpha\neq 1$ だから $\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$

$\alpha\neq 0$ だから両辺を α^2 で割り，

$$\alpha^2+\alpha+1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}=0$$

$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=X$ とおくと，$X^2+X-1=0$　……… ①

ところで，一般に

$$(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}$$

分母の実数化

$$=(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=2\cos\theta$$

であるから，$X=2\cos 72^\circ$．したがって $X>0$ でなければならないので，①より

$X=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$　よって，$\boldsymbol{\cos 72^\circ=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}}$

B. 610

放物線 $y=x^2$ 上の動点Pは，

点A(1, 1)と点B$\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$との間を動く．

∠APBの大きさが最小になるときのPのx座標を求めよ．

アプローチ ∠APB$=\theta$ について，$\tan\theta$ をPのx座標で表すことは，B.218で学んでいます．

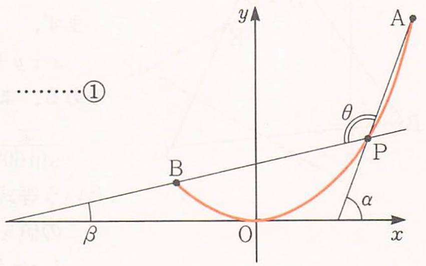
解答 2直線AP，BPのx軸となす角をそれぞれα，β($-90°<\beta<\alpha<90°$)とおくと，∠APB$=\theta$ は

$$\theta=180°-(\alpha-\beta)$$

であるので，

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}\quad\cdots\cdots①$$

となる．



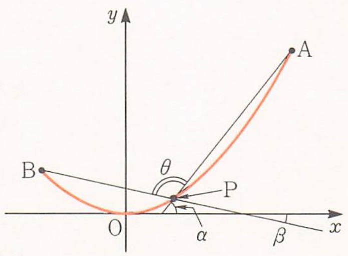
そこで，P$(x,\ x^2)$とおくと，

$$\begin{cases}\tan\alpha=\dfrac{1-x^2}{1-x}=x+1\\[2ex]\tan\beta=\dfrac{\frac{1}{4}-x^2}{-\frac{1}{2}-x}=x-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

となるので，これらを①に代入して整理すると

$$\tan\theta=-\frac{3}{2x^2+x+1}=-\frac{3}{2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}}$$

となる．



ここで，$\tan\theta<0$ より，θ の範囲は $90°<\theta<180°$ と考えられるので，θ が最小となるのは $\tan\theta$ が最小，したがって，$2x^2+x+1$ が最小となるときであることが分かる．

よって，求める点Pのx座標は

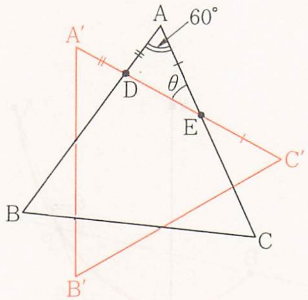
$$\boldsymbol{x=-\frac{1}{4}}$$

である．

B. 611

1辺の長さ a の正三角形 ABC をその中心のまわりに角 θ 回転して得られる正三角形を A′B′C′ とする．ただし，$0^\circ<\theta<120^\circ$ とする．

両三角形の共通部分の周 l を θ の関数として表し，その最小値を求めよ．



解答　共通部分は等辺六角形である．

その1辺 DE$=x$ とし，

$$AD=A'D=y,\ AE=C'E=z$$

とおく．

まず，

$$x+y+z=A'C'=a \quad \cdots\cdots\ ①$$

である．また，△ADE に正弦定理を用いると

$$\frac{x}{\sin 60^\circ}=\frac{y}{\sin\theta}=\frac{z}{\sin(120^\circ-\theta)}$$

という等式を得る．

この値を k とおくと，

$$\begin{cases} x=k\sin 60^\circ \\ y=k\sin\theta \\ z=k\sin(120^\circ-\theta) \end{cases}$$

となる．

これを①に代入すると，

$$k\{\sin 60^\circ+\sin\theta+\sin(120^\circ-\theta)\}=a$$

$$\therefore\quad k=\frac{a}{\sin 60^\circ+\sin\theta+\sin(120^\circ-\theta)}$$

だから

和→積
$\sin\theta+\sin(120^\circ-\theta)$
$=2\sin 60^\circ\cos(\theta-60^\circ)$

$$l=6x=6k\sin 60^\circ=\frac{6a\sin 60^\circ}{\sin 60^\circ+\sin\theta+\sin(120^\circ-\theta)}$$

$$=\frac{6a}{1+2\cos(\theta-60^\circ)}$$

これより，

$\theta=60^\circ$ のとき l は最小となり，

最小値$=\boldsymbol{2a}$

である．

B.612

2つの曲線 $y=x^3-3x$ … ① と $y=3(x-a)^2+b$ … ②
とが，相異なる3点で交わり，この2つの曲線で囲まれた2つの図形が同じ面積をもつため，a と b が満たすべき条件を求めよ．ただし，

$$\int_\alpha^\gamma (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,dx=\frac{1}{12}(\gamma-\alpha)^3(2\beta-\alpha-\gamma)$$

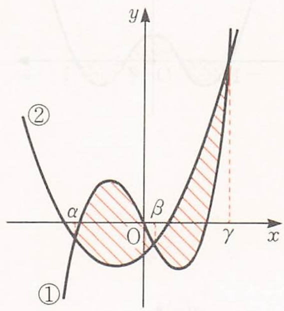
であることは，証明なしに用いてよい．

アプローチ 2曲線の囲む2つの部分の面積が等しいための条件を処理する方法は，B. 507で学びました．なお，B. 504にならえば与えられた公式を証明するのは難しくありません．

解答 ①，②から y を消去して得られる x の3次方程式 $x^3-3x^2+3(2a-1)x-(3a^2+b)=0$ ……③
の左辺を $f(x)$ とおき，③の実数解を，α，β，γ $(\alpha<\beta<\gamma)$ とすると，面積が等しい条件は

$\int_\alpha^\gamma f(x)\,dx=0$，すなわち

$$\int_\alpha^\gamma (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,dx=0$$



であり，与えられた公式を用いると，これは

$(\gamma-\alpha)^3(2\beta-\alpha-\gamma)=0$ 　∴　$2\beta=\alpha+\gamma$ ……④

となる．よって，3次方程式③が，④かつ $\alpha<\beta<\gamma$ を満たす実数解 α，β，γ をもつための a，b の条件が求めるものとなる．ところで，α，β，γ は，a，b により

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=3 & \cdots\cdots ⑤ \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3(2a-1) & \cdots\cdots ⑥ \\ \alpha\beta\gamma=3a^2+b & \cdots\cdots ⑦ \end{cases}$$

◁ 3次方程式の解と係数の関係 ☞ 数学B

で定まる．したがって④が成り立つためには，⑤より

$\beta=1$ ……⑧，　$\alpha+\gamma=2$ ……⑨

であるべきである．これらを⑥，⑦に代入すると，

$\gamma\alpha=6a-5$ ……⑩，　$\gamma\alpha=3a^2+b$ ……⑪

となる．したがって⑨，⑩，⑪をともに満たす異なる実数 α，γ $(\alpha<\gamma)$ が存在する条件から，

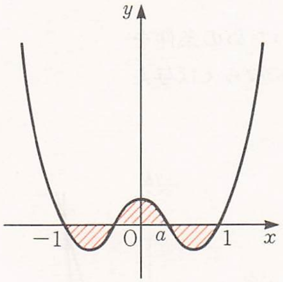
$1^2-(6a-5)>0$ かつ $6a-5=3a^2+b$

∴ $\boldsymbol{a<1}$ **かつ** $\boldsymbol{b=-3a^2+6a-5}$.

◁ 和が p 積が q である2数を解とする2次方程式 $t^2-pt+q=0$ が実数解をもつ条件は $p^2-4q\geqq 0$

B. 613

a は $0<a<1$ を満たす数として $f(x)=(x^2-a^2)(x^2-1)$ とする．$y=f(x)$ のグラフと x 軸とによって囲まれる3つの部分の面積の和 S が最小となるのは $a=2\sin 10°$ のときであることを証明せよ．



解答　$y=f(x)$ のグラフの概形は左図のようになる．y 軸対称性により

$$\frac{S}{2}=\int_0^a f(x)dx+\int_a^1\{-f(x)\}dx$$

となる．ここで $f(x)$ の原始関数として

$$F(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{a^2+1}{3}x^3+a^2x$$

をとれば

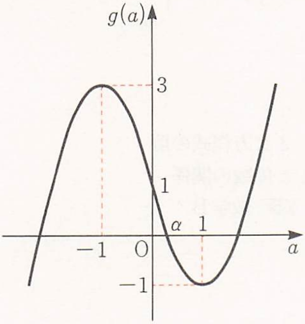
$$\frac{S}{2}=\Big[F(x)\Big]_0^a+\Big[-F(x)\Big]_a^1$$
$$=2F(a)-F(1)-F(0)$$

$$\therefore\quad S=4\left\{\frac{a^5}{5}-\frac{a^2+1}{3}\cdot a^3+a^2\cdot a\right\}-2\left\{\frac{1}{5}-\frac{a^2+1}{3}+a^2\right\}$$
$$=-\frac{8}{15}a^5+\frac{8}{3}a^3-\frac{4}{3}a^2+\frac{4}{15}$$

となる．

$$\frac{dS}{da}=-\frac{8}{3}a(a^3-3a+1)$$

において，$g(a)=a^3-3a+1$ とおくと $g'(a)=3(a^2-1)$ となることから，$g(a)$ のグラフは左のようになり $0<\alpha<1$ かつ $g(\alpha)=0$ を満たす数 α が1つ存在し，$0<a<\alpha$ では $g(a)>0$，$\alpha<a<1$ では $g(a)<0$ となる．



a	(0)		α		(1)
$\frac{dS}{da}$		−	0	+	
S		↘		↗	

よって，$a=\alpha$ のとき S が最小になる．
ところが3倍角の公式により $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ であるから

$\beta=2\sin 10°$ とおくと $\dfrac{1}{2}=3\left(\dfrac{\beta}{2}\right)-4\left(\dfrac{\beta}{2}\right)^3$

$\therefore$　$\beta^3-3\beta+1=0$ すなわち $g(\beta)=0$

もちろん $0<\beta<1$ であるから，上の議論より

$\beta=\alpha$　である．■

B. 614

$f(x)=x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D$ は任意の3次以下の多項式 $g(x)$ に対して

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx=0$$

を満たす．

(1)　A，B，C，D を決定せよ．

(2)　$G(x)$，$Q(x)$ は高々 n の整式で，$f(x)=0$ の相異なる実数解 α_1，α_2，α_3，α_4 に対し $G(\alpha_i)=Q(\alpha_i)$ [$i=1$，2，3，4] を満たすとする．この条件を満たすすべての $G(x)$，$Q(x)$ に対して

$$\int_{-1}^{1} G(x)dx=\int_{-1}^{1} Q(x)dx \quad \cdots\cdots\cdots \text{Ⓐ}$$

が成り立つような n の最大値を求めよ．

アプローチ　$G(\alpha_i)=Q(\alpha_i)$ [$i=1$，2，3，4] という条件は $G(x)-Q(x)$ が $f(x)$ で割り切れるという条件と同値です．

解答　(1)　$g(x)=kx^3+lx^2+mx+n$ とおくと

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D)\times(kx^3+lx^2+mx+n)dx$$

$$=k\int_{-1}^{1}(Ax^6+Cx^4)dx+l\int_{-1}^{1}(x^6+Bx^4+Dx^2)dx$$

$$+m\int_{-1}^{1}(Ax^4+Cx^2)dx+n\int_{-1}^{1}(x^4+Bx^2+D)dx$$

$$=\left(\frac{2}{7}A+\frac{2}{5}C\right)k+\left(\frac{2}{7}+\frac{2}{5}B+\frac{2}{3}D\right)l$$

$$+\left(\frac{2}{5}A+\frac{2}{3}C\right)m+\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{3}B+2D\right)n$$

$$=0$$

◀ $\int_{-a}^{a} x^{2k+1}dx=0$

この式が任意の k，l，m，n に対して成り立つためには，

$$\frac{2}{7}A+\frac{2}{5}C=0$$

$$\frac{2}{7}+\frac{2}{5}B+\frac{2}{3}D=0$$

$$\frac{2}{5}A+\frac{2}{3}C=0$$

$$\frac{2}{5}+\frac{2}{3}B+2D=0$$

であることが必要十分である．上の4式を連立して

$$\boldsymbol{A=0,\ B=-\frac{6}{7},\ C=0,\ D=\frac{3}{35}}$$

(2)　与えられた条件より

$$G(x)-Q(x)=f(x)h(x)$$

と表せる．

$f(x)$ が4次式であることを考えると，$n\leqq 7$ のときは，$h(x)$ は高々3次式であるから，

$$\int_{-1}^{1}\{G(x)-Q(x)\}dx=\int_{-1}^{1}f(x)h(x)dx=0$$

すなわち，Ⓐが成り立つ．

一方，$n=8$ の場合，たとえば，$G(x)=\{f(x)\}^2$，$Q(x)\equiv 0$ とすると

$$\int_{-1}^{1}G(x)dx=\int_{-1}^{1}f(x)\left(x^4-\frac{6}{7}x^2+\frac{3}{35}\right)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}f(x)\cdot x^4dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(x^8-\frac{6}{7}x^6-\frac{3}{35}x^4\right)dx$$

$$=2\left(\frac{1}{9}-\frac{6}{49}-\frac{3}{175}\right)\neq 0$$

$$\int_{-1}^{1}Q(x)dx=0$$

となってⒶは成り立たない．

∴　求める n の最大値は **7** である．

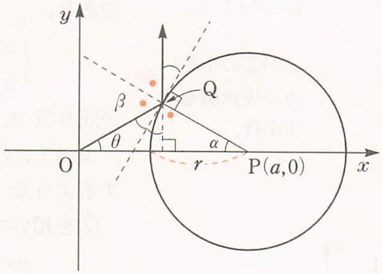
B. 615

xy 平面の原点から，x 軸の正方向と角 θ をなす方向に射出された光が，点 $\mathrm{P}(a,\ 0)$ を中心とする半径 r の円周で反射して，y 軸と平行に進んだ．ただし，光が円周で反射するとき，反射点での円の法線は，入射光線と反射光線のなす角を2等分し，かつ $\theta>0$，$a>r>0$ であるとする．

(1)　$\angle\mathrm{OPQ}=\alpha$ とする時，$\tan\theta$ を α を用いて表せ．

(2)　$\cos\alpha$ を r と a を用いて表し，r を限りなく0に近づけた時の α の極限値を求めよ．

アプローチ　(2)では，θ と α の関係式を導いて，(1)の結果とあわせて $\tan\theta$ を消去すれば求める関係式が得られます．



解答　(1)　右図より

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ であるから

$\mathrm{Q}(x,\ y)$ は，$(x,\ y)$

$=(a,\ 0)+(r\cos(180^\circ-\alpha),\ r\sin(180^\circ-\alpha))$

$=(a-r\cos\alpha,\ r\sin\alpha)$

となる．

$$\therefore\ \tan\theta=\frac{r\sin\alpha}{a-r\cos\alpha}\ \cdots\cdots\cdots\ ①$$

(2)　光線と法線のなす角を β とすると，上図より

$\alpha+\beta=90^\circ$，$\theta+3\alpha+\beta=180^\circ$

したがって $\theta=90^\circ-2\alpha$ であるから

$$\tan\theta=\tan(90^\circ-2\alpha)=\frac{2\cos^2\alpha-1}{2\sin\alpha\cos\alpha}\ \cdots\cdots\cdots\ ②$$

◀ $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$
$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

①と②より，$\tan\theta$ を消去すると

$2a\cos^2\alpha-r\cos\alpha-a=0$，$\cos\alpha>0$ であるから

$$\cos\alpha=\frac{r+\sqrt{r^2+8a^2}}{4a}$$

$\therefore$　r が0に限りなく近づく時，$\cos\alpha$ は $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ に限りなく近づくので，α は 45° に限りなく近づく．

◀ $0^\circ<\alpha<90^\circ$

B. 616

実数 k がいろいろな値をとって変化するとき，
$y=f(x)=x^3-3x^2+3kx$ の極大点の軌跡を求め，図示せよ．

アプローチ x^3 の係数>0 の 3 次関数 $f(x)$ は，2 次方程式 $f'(x)=0$ の 2 実数解のうち，小さい方で極大となります．

解答 $f'(x)=3x^2-6x+3k$
$=3(x^2-2x+k)$

$f(x)$ は，$f'(x)=0$ の 2 実数解のうち，小さい方で極大となるので，極大点の座標を $(x,\ y)$ とすると，まず，

極大点は $y=f(x)$ 上．

$$y=x^3-3x^2+3kx \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

であり，

x が②の小さい方の実数解を表す条件．

$$\begin{cases} x^2-2x+k=0 & \cdots\cdots\cdots ② \\ x<1 & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

が成り立つ．

よって，①，②，③をともに満たす実数 k が存在するような x，y の条件が求めるものとなる．

②を用いて，①から k を消去すると，

$$y=-2x^3+3x^2 \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

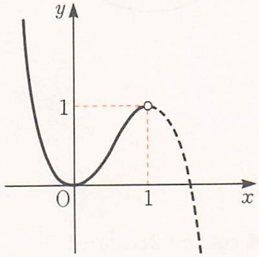
となるので，求める極大点の軌跡は，③かつ④，すなわち，

$$\boldsymbol{y=-2x^3+3x^2} \text{ かつ } \boldsymbol{x<1}$$

である．さらに，④から

$$y'=-6x^2+6x=-6x(x-1)$$

となることから，③かつ④の左のグラフを得る．



［注］ 3 次関数 $f(x)$ が極値をとるためには，$f'(x)=0$ が異なる 2 実数解をもつことが必要十分で，その条件は $k<1$ ………㋐ となる．

この下に，$f'(x)=0$ は異なる 2 実数解 $x=1\pm\sqrt{1-k}$ をもつので，このうちの小さい方の解 $x=1-\sqrt{1-k}$ ………㋑ で $f(x)$ は極大となる．よって，極大点の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$y=x^3-3x^2+3kx \quad \cdots\cdots\cdots ㋒$$

であり，㋐，㋑，㋒が極大点 $(x,\ y)$ のパラメタ表示を与えることになる．これから k を消去すればよいのだが，上の解答より見通しは悪い．㋐かつ㋑のかわりに，②かつ③で済ますのがうまいのである．

B. 617

条件 $f_0(x)=1$ ………①,

$$f_{n+1}(x)=1+\int_0^x f_n(t)\,dt \quad \cdots\cdots\text{②}$$

$[n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots]$ を満たす関数 $f_n(x)$ に対して次の問いに答えよ.

(1)　$f_n(x)$ を求めよ.

(2)　n が偶数のとき, 任意の実数 x に対し $f_n(x)>0$ であり, n が奇数の時 $f_n(x)=0$ はただ1つの実数解をもつことを数学的帰納法を用いて証明せよ.

アプローチ　(1)では, まず $f_1(x)$, $f_2(x)$ を求めて $f_n(x)$ の見当をつけ, それを数学的帰納法で証明します.

解答　(1)　①, ②より $f_1(x)=1+x$,

$f_2(x)=1+x+\dfrac{1}{2}x^2$ であるので,

$$f_n(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!} \quad \cdots\cdots(*)$$

と推定される.

この推定が正しいことを数学的帰納法で示す.

[I]　$n=0$ のとき, ①より(＊)は成り立つ.

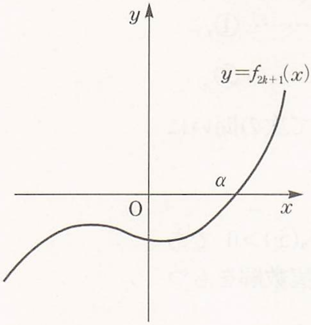
[II]　$n=k$ のとき, (＊)が成り立つと仮定すると,

②より

$$f_{k+1}(x)=1+\int_0^x\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{t^k}{k!}\right)dt$$

$$=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$$

となり, $n=k+1$ でも(＊)は成り立つ.



（2）［I］ $n=0$，1 のとき $f_0(x)=1$，
$f_1(x)=1+x$ であるから成り立つ。

［II］ 任意の実数 x に対し $f_{2k}(x)>0$ であり，$f_{2k+1}(x)=0$ を満たす x の実数値 α がただ 1 つだけ存在すると仮定する。

$$f_{2k+1}{}'(x)=f_{2k}(x)$$

であるから，$f_{2k+1}(x)$ は単調増加であり，したがって

$$\begin{cases} x<\alpha \iff f_{2k+1}(x)<0 \\ x>\alpha \iff f_{2k+1}(x)>0 \end{cases}$$

である。

$$f_{2k+2}{}'(x)=f_{2k+1}(x)$$

より，$f_{2k+2}(x)$ の増減は下表のようになる。

x		α	
$f'_{2k+2}(x)$	$-$	0	$+$
$f_{2k+2}(x)$	↘		↗

よって，

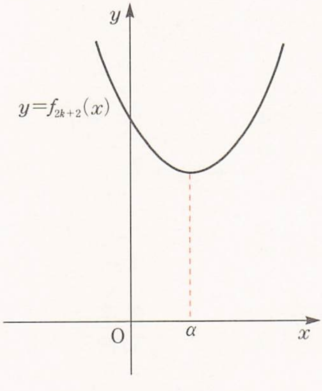
$$f_{2k+2}(x)\geqq f_{2k+2}(\alpha)$$

$\alpha\neq 0$ ▶

$$=f_{2k+1}(\alpha)+\frac{\alpha^{2k+2}}{(2k+2)!}$$

$$>f_{2k+1}(\alpha)=0$$

つまり，任意の実数 x に対し，$f_{2k+2}(x)>0$ である。



つぎに $f_{2k+3}(x)$ は，x の $(2k+3)$ 次関数であるから $f_{2k+3}(x)=0$ を満たす x の実数値は少なくとも 1 つ存在する。

一方，

$$f_{2k+3}{}'(x)=f_{2k+2}(x)>0$$

であるから $f_{2k+3}(x)$ は単調増加である。

よって，$f_{2k+3}(x)=0$ を満たす x の実数値は，ただ 1 つだけ存在する。■

B. 618

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とし，$f_n(x)$ を次のように定める．

$$f_0(x)=f(x)$$
$$f_n(x)=\frac{1}{2}\{f_{n-1}(x-1)+f_{n-1}(x+1)\}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1)　$f_n(x)$ を求めよ．

(2)　$a \neq 0$ のとき，n がある数をこえると，$f_n(x)$ は極値をもたなくなることを示せ．

アプローチ　$f_n(x)$ の次数に注目することがポイントです．

解答　(1)　$f_0(x)$ は高々 3 次式であり，
$f_{n-1}(x)$ が高々 3 次式であるなら，$f_n(x)$ も高々 3 次式であるから

$$f_n(x)=a_nx^3+b_nx^2+c_nx+d_n$$

とおける．まず，

$$a_0=a,\ b_0=b,\ c_0=c,\ d_0=d \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

また

$$f_n(x)=\frac{1}{2}\{f_{n-1}(x-1)+f_{n-1}(x+1)\}$$

より

$$\begin{aligned}&a_nx^3+b_nx^2+c_nx+d_n\\ &=\frac{1}{2}\{a_{n-1}(x-1)^3+b_{n-1}(x-1)^2+c_{n-1}(x-1)+d_{n-1}\\ &\quad +a_{n-1}(x+1)^3+b_{n-1}(x+1)^2+c_{n-1}(x+1)+d_{n-1}\}\\ &=a_{n-1}x^3+b_{n-1}x^2+(3a_{n-1}+c_{n-1})x+(b_{n-1}+d_{n-1})\end{aligned}$$

$$\begin{cases}a_n=a_{n-1} & \cdots\cdots\cdots ②\\ b_n=b_{n-1} & \cdots\cdots\cdots ③\\ c_n=3a_{n-1}+c_{n-1} & \cdots\cdots\cdots ④\\ d_n=b_{n-1}+d_{n-1} & \cdots\cdots\cdots ⑤\end{cases}$$

$$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

①を考慮して，②〜⑤を解く．

まず，②と③から

$$\begin{cases} a_n = a \\ b_n = b \end{cases} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

である．すると，④，⑤で定まる $\{c_n\}$，$\{d_n\}$ はそれぞれ公差が $3a$，b の等差数列で

$$\begin{cases} c_n = c + 3an \\ d_n = d + bn \end{cases}$$

である．

したがって

$$\boldsymbol{f_n(x) = ax^3 + bx^2 + (c+3an)x + (d+bn)}$$

(2)　(1)の結果により，$f_n'(x)$ は

$$f_n'(x) = 3ax^2 + 2bx + (c+3an)$$

という 2 次関数である．この判別式を D_n とおくと

$$\frac{D_n}{4} = b^2 - 3a(c+3an)$$

$$= -9a^2n + (b^2 - 3ac)$$

であるから，n が

$a \neq 0$ ▶

$$n \geqq \frac{b^2-3ac}{9a^2}$$

を満たすほど大きくなると

$$D_n \leqq 0$$

となる．このとき，$f_n'(x)$ は符号変化をもたず

したがって，$f_n(x)$ は極値をもたない．■

B. 619

半径が a の底面をもつ2つの直円柱が，中心軸が直交するように交わっている．このとき，2つの直円柱の共通部分の体積 V を求めたい．

(1) 円柱の中心軸を含む平面に垂直で，中心軸の交点Oを通る直線を x 軸，Oをその原点とするとき，$x=$一定なる平面によるこの立体の切り口の面積 $S(x)$ を x の式で表せ．

(2) V を求めよ．

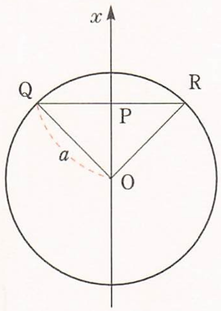
アプローチ 円柱を中心軸に平行な平面で切った切り口は2本の平行線を境界とする帯状図形(無限に伸びた長方形)になります．直交する2つの帯状図形の共通部分が考えるべき切り口です．

解答 (1) $x=$一定なる平面によるこの立体の切り口は，右図からわかるように，一辺の長さが

$$QR=2PQ=2\sqrt{a^2-x^2}$$

である正方形である．よって

$$S(x)=2\sqrt{a^2-x^2}\times2\sqrt{a^2-x^2}$$
$$=\boldsymbol{4(a^2-x^2)}$$

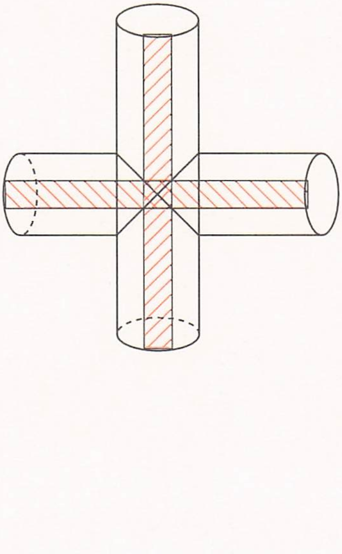


(2) 切り口が存在するのは，

$$-a\leqq x\leqq a$$

の場合だから，求める体積 V は

$$V=\int_{-a}^{a}S(x)\,dx$$
$$=\int_{-a}^{a}4(a^2-x^2)\,dx$$
$$=8\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a$$
$$=\boldsymbol{\frac{16}{3}a^3}$$




チャレンジ

C. 探究篇

本篇では，数学IIに登場する数学的概念のうち，

教科書や中級の参考書では，さりげなく通り過ぎている（あるいは，無自覚に飛ばしている）もの

や

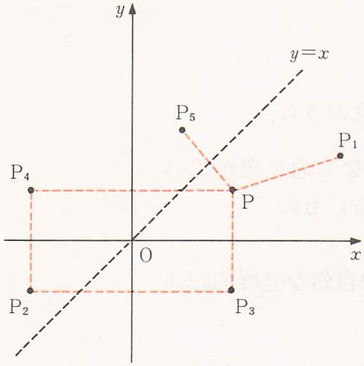
「指導要領」の制約のために，本来の自然な発展的記述を中断されているもの

を，意欲の高い読者のために，項目別にまとめたものである．

ところによっては，理解に困難を感ずることもあるだろうが，あまり神経質にならずに，何回も繰り返して読んでもらいたい．自分の興味のある項目を，ひろい読みするだけでも，もちろん良い．

なお，読者の利便を考慮して，本シリーズ「大学への数学ニューアプローチ」(数学 I，数学A）の項目を，一部重ねて収録した．

C.1 図形の移動



点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を，

(1) x 方向に a，y 方向に b だけ平行移動すると，
点 $\mathrm{P}_1(x+a,\ y+b)$ に

(2) 原点に関して対称移動すると，
点 $\mathrm{P}_2(-x,\ -y)$ に

(3) x 軸に関して対称移動すると，
点 $\mathrm{P}_3(x,\ -y)$ に

(4) y 軸に関して対称移動すると，
点 $\mathrm{P}_4(-x,\ y)$ に

(5) 直線 $y=x$ に関して対称移動すると，点 $\mathrm{P}_5(y,\ x)$ にそれぞれ移る．

それでは，方程式

$$f(x,\ y)=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

で表される xy 平面上の曲線は，どのような曲線に移されるだろうか．

[定理] 曲線①を

(1) x 方向に a，y 方向に b だけ平行移動すると，
曲線 $f(x-a,\ y-b)=0$ に，

(2) 原点に関して対称移動すると，
曲線 $f(-x,\ -y)=0$ に，

(3) x 軸に関して対称移動すると，
曲線 $f(x,\ -y)=0$ に，

(4) y 軸に関して対称移動すると，
曲線 $f(-x,\ y)=0$ に，

(5) 直線 $y=x$ に関して平行移動すると，
曲線 $f(y,\ x)=0$ に，

それぞれ移る．

証明： (1) 問題の平行移動は，点 $(x,\ y)$ を，

$$X=x+a \qquad \cdots\cdots ②$$

$$Y=y+b \qquad \cdots\cdots ③$$

で定まる点$(X,\ Y)$に移す"写像"であり，我々の目的は，この写像による①の像を求めること，すなわち，点$(x,\ y)$が①上を動いたとき点$(X,\ Y)$の描く軌跡を求めることである．(☞ B.140)

点$(X,\ Y)$が求める軌跡上にある．

$\iff$ ①，②，③を満たす x，y が存在する

$\iff$ $x=X-a,\ y=Y-b$ が①を満たす

$\iff$ $f(X-a,\ Y-b)=0$

であるから，写像②，③による①の像は，

$$f(x-a,\ y-b)=0$$

と表せる．

(2)〜(5)においても同様に，

(2) $\begin{cases} X=-x \\ Y=-y \end{cases}$　(3) $\begin{cases} X=x \\ Y=-y \end{cases}$

(4) $\begin{cases} X=-x \\ Y=y \end{cases}$　(5) $\begin{cases} X=y \\ Y=x \end{cases}$

で与えられる写像による①の像を求めればよい．■

1° 直　線 $y-b=m(x-a)$

放物線 $y-b=(x-a)^2$

は，それぞれ

直　線 $y=mx$

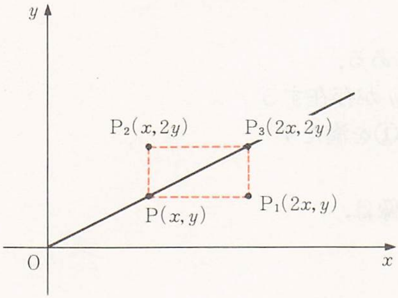
放物線 $y=x^2$

を(1)のように移動したものである．

2° 方程式①が y について解けるとき，①は，ある関数 $y=g(x)$ を定める．さらに①が x についても解けるならば，関数 $g(x)$ は逆関数をもつ．このとき，曲線 $f(x,\ y)=0$ は $y=g(x)$ のグラフであり，(5)で求めた曲線 $f(y,\ x)=0$ は，この逆関数のグラフとなる．

C.2 図形の変形

（放物線は，みな相似）



xy 平面上で，$P(x,\ y)$ とすると，

(1)　$P_1(2x,\ y)$ は，P を x 軸方向に 2 倍の位置に伸ばした点

(2)　$P_2(x,\ 2y)$ は，P を y 軸方向に 2 倍の位置に伸ばした点

(3)　$P_3(2x,\ 2y)$ は原点を相似の中心として，2 倍に拡大した点

である．それでは，方程式 $f(x,\ y)=0$ で表される xy 平面上の曲線 C に対し，

(1)　$f(2x,\ y)=0$

(2)　$f(x,\ 2y)=0$

(3)　$f(2x,\ 2y)=0$

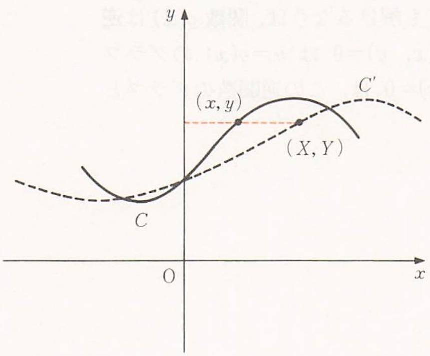
は，それぞれどんな曲線を表すであろうか？　(1), (2), (3)はどれも似たようなものだから，(1)の場合を一般化した次の定理を証明しよう．

[定理]　曲線 $C : f(x,\ y)=0$ に対し，これを x 軸方向に a 倍に伸ばした曲線 C' は，方程式

$$f\left(\frac{1}{a}x,\ y\right)=0$$

で表される．ただし，a は 0 でない実数とする．

証明：　点 $(x,\ y)$ を，x 軸方向に a 倍に伸ばした点を，$(X,\ Y)$ とおくと



$$\begin{cases} X=ax \\ Y=y \end{cases}$$

という関係がある．よって，

点 $(X,\ Y)$ が C' 上にある

$\iff$ 点 $(x,\ y)=\left(\dfrac{X}{a},\ Y\right)$ が C 上にある

$\iff f\left(\dfrac{X}{a},\ Y\right)=0$

である．

ゆえに，C' は，方程式

$$f\left(\frac{x}{a},\ y\right)=0$$

で表される．■

ここで証明されたことを応用して，放物線

$$P_1 : y=x^2,\ P_2 : y=2x^2$$

の関係を考えてみよう．

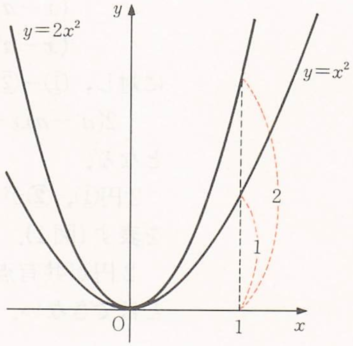
P_2 の方程式は，P_1 の方程式において，

y のかわりに $\frac{y}{2}$

とおいたものにほかならないから，P_2 は，

P_1 を y 軸方向に 2 倍に伸ばした

ものと考えることができる．



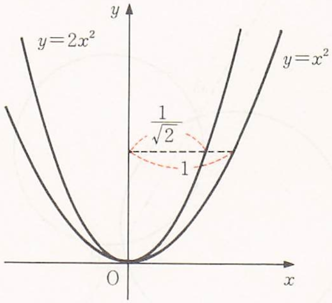
一方，P_1 の方程式において

x のかわりに $\sqrt{2}\,x$

とおいても，P_2 の方程式が得られるから，P_2 は，

P_1 を x 軸方向に $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍に伸ばした

ものであるともいえる．



さらにまた，P_1 の方程式において

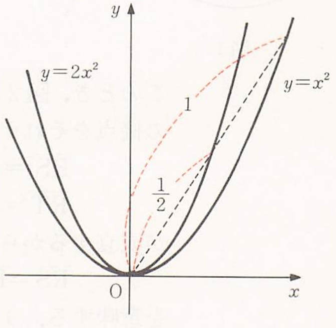
x のかわりに $2x$

y のかわりに $2y$

とおいても，P_2 の方程式が得られるので，P_2 は，

P_1 を原点を相似の中心として $\frac{1}{2}$ 倍に相似拡大した

ものと考えることもできる．



一般に，$y=ax^2\ (a \neq 0)$ は，$y=x^2$ において，

$$\begin{cases} x \text{ のかわりに } ax \\ y \text{ のかわりに } ay \end{cases}$$

を代入することによって得られるから，**放物線 $y=ax^2$ は，a の値によらず放物線 $y=x^2$ に，相似である．**

C.3 共通弦の方程式

2つの円の方程式

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0 \quad \cdots\cdots ①$$

$$(x-a')^2+(y-b')^2-r'^2=0 \quad \cdots\cdots ②$$

に対し，①−② を作ると

$$2(a'-a)x+2(b'-b)y+a^2+b^2-r^2-a'^2-b'^2+r'^2=0 \quad \cdots ③$$

となる．

2円①，②が2点A，Bで交わるとき，③は直線AB(共通弦)を表す(図1)．

2円が共有点をもたないとき，③を2円の共通弦と考えることはできない．

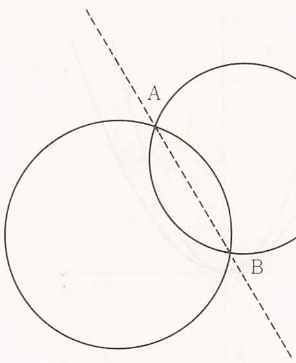


図1

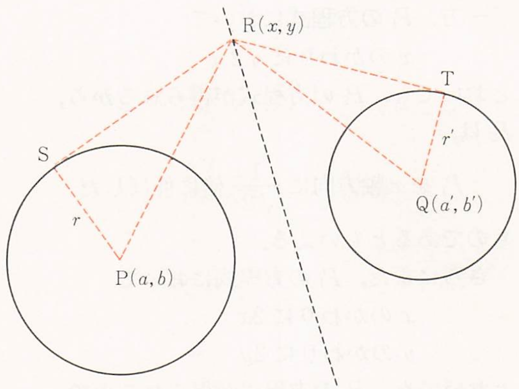


図2

このとき，図2のように，点R(x, y)から円①，②に引いた接線の接点をそれぞれS，Tとすると，

$$\overline{\mathrm{RS}}^2=\overline{\mathrm{RP}}^2-\overline{\mathrm{SP}}^2=(x-a)^2+(y-b)^2-r^2$$

$$\overline{\mathrm{RT}}^2=\overline{\mathrm{RQ}}^2-\overline{\mathrm{TQ}}^2=(x-a')^2+(y-b')^2-r'^2$$

が成立するから，③は

$$\overline{\mathrm{RS}}=\overline{\mathrm{RT}}$$

を意味する．すなわち，③は，2円①，②に引いた接線の長さが等しいような点Rの軌跡を表す．

このように，「共通弦」，「2接線の長さが等しい点の軌跡」という2つの解釈は，互いに補い合うものと言える．

C.4 平均とその図形的意味

正数 x，y に対し，$\dfrac{x+y}{2}$ を相加平均，$\sqrt{xy}$ を相乗平均と呼んだ．そもそも「平均」とは何だろうか．試みに次のように定式化してみよう．x，$y>0$ に対して定義された関数 $f(x,\ y)$ が，

$$(*)\quad \begin{cases} f(x,\ x)=x \\ f(x,\ y)=f(y,\ x) \\ x<y \Longrightarrow x<f(x,\ y)<y \end{cases}$$

を満たすとき，$f(x,\ y)$ を **平均** と呼ぶ．

例えば

$$f(x,\ y)=\frac{2}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}},\quad f(x,\ y)=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

は(＊)を満たす(前者を調和平均，後者を2乗平均という)．

ここで，$g(x)=\dfrac{1}{x}$ とおくと，x，y の調和平均 z は

$$g(z)=\frac{1}{2}(g(x)+g(y))$$

から定まる数であり，また2乗平均は $g(x)=x^2$ としたものに他ならない．対数関数 $g(x)=\log x$ を用いると，相乗平均もこの形式でとらえられる．

さらに下図において，直線AQが

i）OAを直径とする円，

ii）Aを中心としてB，Cを通る円，

iii）直線BC

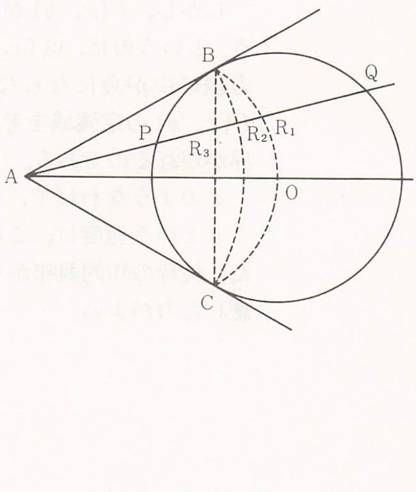
のそれぞれと交わる点を R_1，R_2，R_3 とすると，

AR_1＝“APとAQの相加平均”

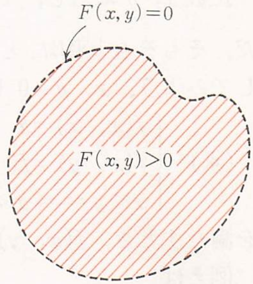
AR_2＝“APとAQの相乗平均”

AR_3＝“APとAQの調和平均”

が成り立ち，特に3平均の大小関係がわかる．



C.5　$F(x,\ y)>0$ の表す領域



具体的な例を通して見たように（☞ B.133，B.134），整式 $F(x,\ y)$ に対し，不等式

$$F(x,\ y)>0 \qquad \cdots\cdots ①$$

の表す領域の境界は，方程式

$$F(x,\ y)=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

の定める曲線であった．

この事実を厳密に示すのは意外に大変である．ここでは，次のように直観的に考えてみる．

「境界」とは何か．それは平面上を動く点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が条件①を満たす状態から満たさない状態に変った瞬間におけるPの位置を集めたものである．ここで「①を満たさない」とは，$F(x,\ y)=0$ または $F(x,\ y)<0$ ということであるが，①を満たさなくなった瞬間には，$F(x,\ y)=0$ となっているに違いない．したがって①の表す領域の境界は，②で与えられる．

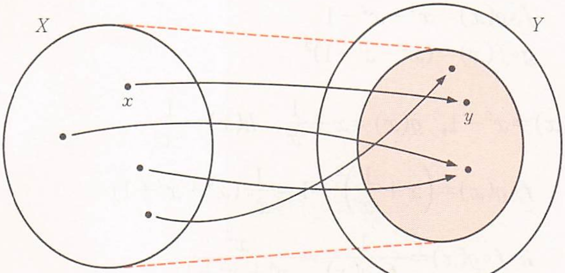
$F(x,\ y)$ が整式の場合には，上記の考察の中の欠陥（たとえば，「点 $(x,\ y)$ が動くとき $F(x,\ y)$ が正の値から直接負の値にジャンプしてしまうかも知れない」「②は曲線でなく領域かも知れない」など）を補って厳密な証明を完成することができる．

しかし，$F(x,\ y)$ が分数式や無理式などになると，事情が違う．というのは，点 $(x,\ y)$ は，分数の分母が 0 にならず，また平方根の中が負にならないような範囲しか動けないので，関数 $F(x,\ y)$ の定義域を考慮しなければならなくなり，定義域の境界が現れるのである．（☞ B.131，B.132）

このようなわけで，まず「一般論に頼って思考の節約をしよう」という態度は，この場合いさめられなければならない．また，純粋の知的興味からにせよ，極度の「一般論偏執病」にも注意した方がよい．

C.6 関数，変換，写像，…

高校以上の数学では，中学で学んだ「関数」以外に，「変換」，「写像」という語が頻繁に登場する．どれも実質的には違わないので，あまり，神経質に区別する必要はないが，安心のために，ここできちんと整理しておこう．



[定義]　X，Y を空でない集合とする．

X の任意の要素 x に対し，これに対応する Y の要素 y がただ１つ存在するとき，この対応を，X から Y への **写像** といい，記号 f などで表す．また，写像 f により，y が x に対応することを，$y=f(x)$ と表す．

とくに，X，Y が数の集合であるときは，写像を **関数** と呼ぶ．

また，$X=Y$ の場合には，写像を **変換** と呼ぶことがある．

厳密に書こうとすると，こんな面倒な表現になるが，数学において，実際に問題となるのは，次のような場合である．

例１　x が実数値をとって変化するときの，関数 $y=x^2$ は $X=Y=\boldsymbol{R}$ (実数全体) として，X から Y への写像である．

例２　実数値をとって変化するパラメタ t で表される動点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ は，$X=\boldsymbol{R}$ (実数全体) から $Y=\boldsymbol{R}^2$ (平面全体) への写像を考えていることになる．

例３　点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が平面上を動くときこれに対応する動点 $\mathrm{Q}(x+y,\ x-y)$ を考えることは，$X=Y=\boldsymbol{R}^2$ (平面全体) として，X から Y への写像を考えることに相当する．このような場合，平面上の点の **変換** という．

C.7 合成関数

2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ に対し，$f(g(x))$ を **合成関数** と呼び，

$$f(g(x))=f\circ g(x)$$

と書く．

例 1°　$f(x)=x^2-x-1$，$g(x)=x^2$ とすると，

$$f\circ g(x)=x^4-x^2-1$$
$$g\circ f(x)=(x^2-x-1)^2$$

2°　$f(x)=x^2-1$，$g(x)=x+\dfrac{1}{x}$，$h(x)=\dfrac{1}{x}$

$$f\circ g(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1=\frac{1}{x^2}(x^4+x^2+1)$$

$$h\circ f\circ g(x)=\frac{1}{f\circ g(x)}=\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$$

複雑な関数も，合成関数に分解できると，話が簡単になる．

たとえば，方程式

$$f\circ g(x)=0$$

を解く場合 や，関数

$$y=f\circ g(x)$$

の値域を求める場合，議論を分割することができる．

また，与えられた関数 $f(x)$ を

$$f(x)=g^{-1}\circ h\circ g(x)\quad (g^{-1} \text{ は } g \text{ の逆関数})$$

のように分解するという発想は，数学の様々な分野に現れる（☞ C.4）．

C.8 指数の定義

有理数 x を $\frac{m}{n}$(n, m は整数)と表すとき，正の数 a に対し，$a^x=a^{\frac{m}{n}}$ は

$$a^{\frac{m}{n}}=(\sqrt[n]{a})^m \quad \text{または} \quad a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

と定義されると，教科書には書いてあるし，本書でもそう述べた(p.131)が，果して論理的にはこれで十分であろうか？

実は，重大な欠陥がある．それは，有理数は，分数と同義でないことに基づく．具体的にいえば，$\frac{2}{3}$ と $\frac{4}{6}$ は，分数としての見かけは異なるが同じ有理数を表す．しかし

$$(\sqrt[3]{a})^2 \quad \text{と} \quad (\sqrt[6]{a})^4$$

が同じであるかは，さしあたり，まったく不明である．

したがって，有理数を指数にもつ「べき」が定義されるためには，一般に正の実数 a と整数 m, n, p $(n \neq 0)$ に対し

$$(\sqrt[np]{a})^{mp}=(\sqrt[n]{a})^m \qquad \cdots\cdots(*)$$

が前もって証明されている必要がある(約分して等しい分数は，等しい「べき」を与える)．

ところで，$(*)$ を証明するには，両辺がともに正であることに注意して n 乗したものどうしを比較すればよいが，

$$\{(\sqrt[np]{a})^{mp}\}^n=(\sqrt[np]{a})^{mnp}=\{(\sqrt[np]{a})^{np}\}^m=a^m$$
$$\{(\sqrt[n]{a})^m\}^n=(\sqrt[n]{a})^{mn}=\{(\sqrt[n]{a})^n\}^m=a^m$$

より，たしかに $(*)$ が成り立つ．上の 2 式の第 2 の指数の変形で整数指数についての指数法則を使っている．

C.9 指数法則

自然数 m，n に対し，指数法則

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立つ．これを前提にして，$a>0$ のとき有理数 x，y についても

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad \cdots\cdots\cdots [1]$$

$$(a^x)^y = a^{xy} \qquad \cdots\cdots\cdots [2]$$

が成り立つことを証明しよう．

[1] の証明

i）まず，x，y が正の有理数であるとする．通分することにより，自然数 m，n，p を用いて

$$x = \frac{m}{p},\ \ y = \frac{n}{p}$$

と表される．このとき①により

$$(a^x \cdot a^y)^p = (a^x)^p \cdot (a^y)^p = (\sqrt[p]{a^m})^p \cdot (\sqrt[p]{a^n})^p$$
$$= a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

しかも，$a^x \cdot a^y > 0$ である．したがって

$$a^x \cdot a^y = \sqrt[p]{a^{m+n}}$$

$$\therefore\quad a^x \cdot a^y = a^{\frac{m+n}{p}} = a^{\frac{m}{p}+\frac{n}{p}} = a^{x+y}$$

よって，$x>0$，$y>0$ の場合につき [1] が示された．

ii）x，y の少なくとも一方が 0 である場合は，$a^0=1$ から [1] は明らかである．

iii）x，y の双方が負のときは，$x=-x'$，$y=-y'$ とおけば，$x'>0$，$y'>0$ であるから，i）に示したことから

$$a^{x'} \cdot a^{y'} = a^{x'+y'}$$

これを用いると，

$$a^x \cdot a^y = \frac{1}{a^{x'}} \cdot \frac{1}{a^{y'}} = \frac{1}{a^{x'+y'}} = a^{-(x'+y')} = a^{x+y}$$

となり [1] が示される．

iv）$x>0$，$y<0$ で $x+y \geqq 0$ であるときには，$y=-y'$ とおけば，

$$a^{y'}\cdot a^{x+y}=a^{(x+y)+y'}=a^{x}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{a^{y}}\cdot a^{x+y}=a^{x}$$

$$\therefore\quad a^{x+y}=a^{x}\cdot a^{y}$$

として[1]が得られる．

v)　$x<0$，$y>0$，$x+y\geqq 0$ の場合は，iv)と同様である．

vi)　最後に，x，y が異符号で，$x+y<0$ の場合には

$$x=-x',\quad y=-y'$$

とおくと，x'，y' が異符号で $x'+y'>0$ である．したがって，すでに示されたiv)とv)の結果から，

$$a^{x'}\cdot a^{y'}=a^{x'+y'}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{a^{x}}\cdot\frac{1}{a^{y}}=\frac{1}{a^{x+y}}$$

$$\therefore\quad a^{x}\cdot a^{y}=a^{x+y}$$

以上 i)～vi)より，x，y が有理数であるすべての場合について[1]が証明された．■　(場合わけがこれだけ大変なので，きちんと証明する教科書は，ないのである！)

[2]の証明

簡単のために $x>0$，$y>0$ の場合の証明だけを記す(その気のある人は，場合わけを実行して完全な証明を書いてみよ)．

自然数 m，n，p，q を用いて

$$x=\frac{m}{p},\quad y=\frac{n}{q}$$

とおく．このとき，$a^{x}=b$ と書けば，②を用いることにより

$$\{(a^{x})^{y}\}^{q}=(b^{y})^{q}=(\sqrt[q]{b^{n}})^{q}=b^{n},$$

$$b^{p}=(a^{x})^{p}=(\sqrt[p]{a^{m}})^{p}=a^{m}$$

したがって，

$$\{(a^{x})^{y}\}^{pq}=[\{(a^{x})^{y}\}^{q}]^{p}=(b^{n})^{p}=b^{np}=(b^{p})^{n}=(a^{m})^{n}=a^{mn}$$

一方，$(a^{x})^{y}>0$ である．すなわち，$(a^{x})^{y}$ は a^{mn} の正の pq 乗根である．

$$\therefore\quad (a^{x})^{y}=\sqrt[pq]{a^{mn}}=a^{\frac{mn}{pq}}=a^{xy}\quad ■$$

C.10 指数関数と等差数列, 等比数列

数列 $\{a_n\}$ が公差 d の等差数列をなしているとき,

$$\alpha_n = 2^{a_n} \qquad n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$$

とおくと,

$$\alpha_{n+1} = 2^{a_{n+1}}$$
$$= 2^{a_n + d} = 2^{a_n} \times 2^d = \alpha_n \times 2^d$$

となる.

したがって, 数列 $\{\alpha_n\} = \{2^{a_n}\}$ は, 公比 $= 2^d$ の等比数列をなす.

逆に, 数列 $\{\alpha_n\}$ が公比 r の等比数列をなしているとき,

$$a_n = \log_2 \alpha_n \qquad n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$$

とおくと

$$a_{n+1} = \log_2 \alpha_{n+1}$$
$$= \log_2(\alpha_n r) = \log_2 \alpha_n + \log_2 r = a_n + \log_2 r$$

となる.

したがって, 数列 $\{a_n\}$ は公差が $\log_2 r$ の等差数列になる. (ただし, 後半の議論は, 高校における対数の真数が正の数に限定されるので, 厳密にいうと, $\alpha_n > 0$ という付帯条件をつけておかなければならない.)

このように, 等差数列と等比数列は, 指数・対数関数を通して, 互いに結びつけられている.

[自然数の列]

1, 2, 3, 4, ……

は, 公差 1 の等差数列をなしているので, これを指数にもつ累乗の列

2^1, 2^2, 2^3, 2^4, ……

は公比 2 の等比数列をなす.

[負数を指数にもつ累乗の定義]

$2^{-1}=\dfrac{1}{2}$，$2^{-2}=\dfrac{1}{2^2}$，$2^{-3}=\dfrac{1}{2^3}$，…… は，等差数列

$$\cdots\cdots -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$$

に対応する列

$$\cdots\cdots 2^{-3},\ 2^{-2},\ 2^{-1},\ 2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ \cdots\cdots$$

が等比数列をなすように作られている．等差数列

$$0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \cdots\cdots$$

や

$$0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 1,\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{3},\ 2,\ \cdots\cdots$$

に対応する数列

$$2^0,\ 2^{\frac{1}{2}},\ 2^1,\ 2^{\frac{3}{2}},\ 2^2,\ \cdots\cdots$$

や

$$2^0,\ 2^{\frac{1}{3}},\ 2^{\frac{2}{3}},\ 2^1,\ 2^{\frac{4}{3}},\ 2^{\frac{5}{3}},\ 2^2,\ \cdots\cdots$$

が等比数列をなすべきであると考えれば，

$$2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2},\ 2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2},\ 2^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{4},\ \cdots\cdots$$

という定義にも納得がいこう．

公差 $\dfrac{1}{m}$ の等差数列

$$0,\ \frac{1}{m},\ \frac{2}{m},\ \frac{3}{m},\ \cdots\cdots,\ \frac{m-1}{m},\ 1$$

公比 $\sqrt[m]{2}$ の等比数列

2^0,	$2^{\frac{1}{m}}$,	$2^{\frac{2}{m}}$,	$2^{\frac{3}{m}}$,	……,	$2^{\frac{m-1}{m}}$,	2^1
‖	‖	‖	‖		‖	‖
1	$\sqrt[m]{2}$	$(\sqrt[m]{2})^2$	$(\sqrt[m]{2})^3$		$(\sqrt[m]{2})^{m-1}$	2

C.11 関数の周期性

任意の実数 x に対して

$$f(x+p)=f(x) \qquad \cdots\cdots (1)$$

が成立するとき，0 でない定数 p を関数 $f(x)$ の周期といい，周期をもつ関数を周期関数という．たとえば，$y=\sin x$ や $y=\cos x$ は周期 $\pm 2\pi$，$\pm 4\pi$，…… をもつ．また $y=\tan x$ の場合は「任意の x に対して」というわけにはいかないが，「両辺が意味をもつ限り成立する」という意味で，$p=\pm\pi$，$\pm 2\pi$，…… を周期という．

正の周期の中で最小のものを基本周期という．基本周期 p_0 を用いると，

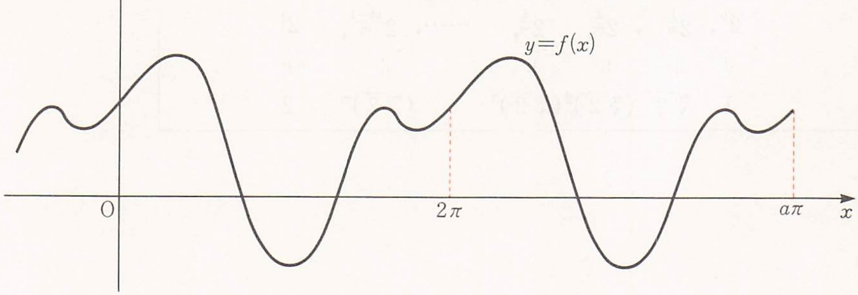
$$p \text{ は } f(x) \text{ の周期} \iff p \text{ は } p_0 \text{ の } 0 \text{ でない整数倍}$$

が成立する．

さて，$\sin kx$，$\cos kx$ $(k=0, 1, 2, \cdots\cdots)$ はどれも周期 2π をもつから

$$\sum_{k=0}^{N}(a_k \sin kx + b_k \cos kx) \qquad \cdots\cdots (2)$$

と表される関数も周期 2π をもつ．ここで a_k，b_k $(k=0, 1, 2, \cdots\cdots, N)$ はどのような実数でもよい．また逆に，周期 2π を持つ関数 $f(x)$ が与えられたとき，$f(x)$ を(2)の形の関数で近似するという考え方がある．これはフーリェ (J. B. J. Fourier 1768～1830) が熱伝導の問題に応用した仕事に端を発するのでフーリェ解析と呼ばれるが，シンセサイザなどによる音声合成の原理としてもおなじみであろう．



C.12　3次関数の標準化

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフを，その頂点が原点に来るように平行移動すると，$y=ax^2$ のグラフとなる．そこで3次関数

$$y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

を適当に平行移動して，関数形を単純化することを考える．まず2次関数の平方完成をまねて

$$X=x+\frac{b}{3a}$$

とおくと

$$y=aX^3+c'X+d' \quad (c',\ d' \text{ は } a,\ b,\ c,\ d \text{ で表せる})$$

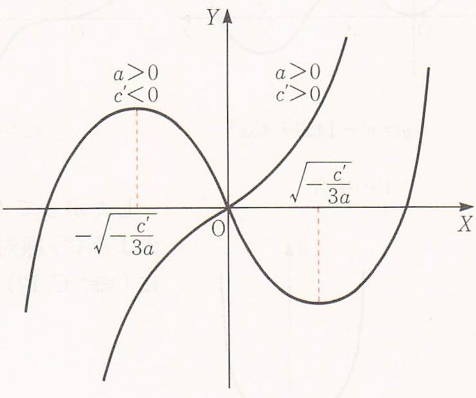
という形になり，さらに $Y=y-d'$ とおくと

$$Y=aX^3+c'X \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

となる．すなわち，(1)のグラフを平行移動すると(2)のグラフになる．ここで(2)のグラフに関して次のことがいえる．

1°　原点に関して対称である．
2°　a と c' の符号によってグラフの形状が分類される．(下図)
3°　Y軸を境目にしてグラフの凹凸が変わる．

特に1°により，(1)のグラフは点 $P\left(-\dfrac{b}{3a},\ f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\right)$ に関して対称であることがわかる．この点Pは「数学III」において学ぶ「変曲点」である．



C.13 4次関数のグラフの分類

4次関数

$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \qquad \cdots\cdots\cdots(1)$$

のグラフを考える．

$y'=0$ となる点の x 座標は，

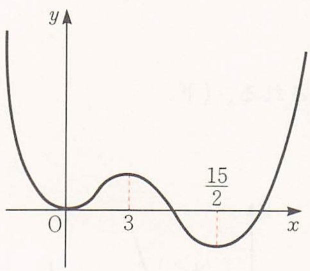
$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots(2)$$

の実数解として定まる．(2)は3次方程式だからその実数解は

1° たがいに異なる	2° 2重解と単解
3° 1つの単解	4° 3重解

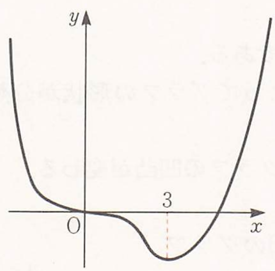
のいずれかである．それぞれの場合のグラフの概形を例を用いて示そう．

1°の場合



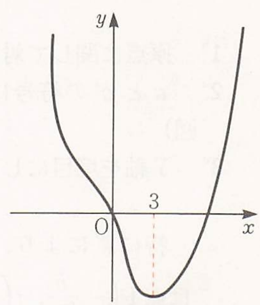
$y = x^4 - 14x^3 + 45x^2$

2°の場合



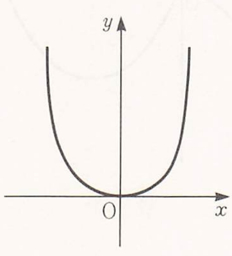
$y = x^4 - 4x^3$

3°の場合



$y = x^4 - 6x^2 - 72x$

4°の場合



$y = x^4$

したがって4次関数のグラフは一般に(2次関数のように)線対称ではなく，また3次関数のように(☞ C.12)点対称でもない．

C.14 商(分数)の微分公式

x の関数 $u=u(x)$, $v=v(x)$ が，ともに微分できるとき，

$v \neq 0$ の範囲では，$f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ も微分することができ，

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}$$

つまり，

$$\text{分数の微分}=\frac{(\text{分子の微分})\times(\text{分母})-(\text{分子})\times(\text{分母の微分})}{(\text{分母})^2}$$

となる．

この公式は，指導要領では除かれているが，修得していると好都合であることも多い．そこで，微分の理解の深化をかねてこれを証明しよう．

そのための準備として，まず，公式

$$\left\{\frac{1}{v(x)}\right\}'=-\frac{v'(x)}{v(x)^2} \qquad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$

を示す．$\Delta x \neq 0$ として

$$\frac{1}{\Delta x}\left\{\frac{1}{v(x+\Delta x)}-\frac{1}{v(x)}\right\}=\frac{1}{\Delta x}\cdot\frac{v(x)-v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)v(x)}$$
$$=\frac{-1}{v(x+\Delta x)v(x)}\cdot\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$

となる．

ここで $\Delta x \longrightarrow 0$ とすると，上の公式①が得られる．

すると，この公式と積の微分の公式を用いることにより

$$f'(x)=\left\{u(x)\cdot\frac{1}{v(x)}\right\}'$$
$$=u'(x)\cdot\frac{1}{v(x)}+u(x)\cdot\left\{\frac{1}{v(x)}\right\}'$$
$$=u'(x)\cdot\frac{1}{v(x)}+u(x)\cdot\left\{-\frac{v'(x)}{v(x)^2}\right\}$$
$$=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}$$

が導かれる．

C.15 商の微分公式の応用例

前項で学んだ公式を用いて，公式

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

が，n が負の整数の場合にも成り立つことをまず証明しよう．

$$f(x) = x^n,\quad n = -m$$

とおくと，m は正の整数で

$$f(x) = \frac{1}{x^m}$$

であるから，前項の商の微分公式（あるいは，その特別の場合である公式①）により

$$f'(x) = \frac{0\times x^m - 1\times mx^{m-1}}{(x^m)^2} = -m\frac{x^{m-1}}{x^{2m}}$$
$$= -mx^{-m-1}$$

となる．右辺に現れるmを，元の n で書きなおせば

$$f(x) = nx^{n-1}$$

となる．■

x		-1		0		1	
$\frac{dy}{dx}$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y	↗		↘		↘		↗

この公式を応用して，高校数学，とりわけ入試によく現れる関数

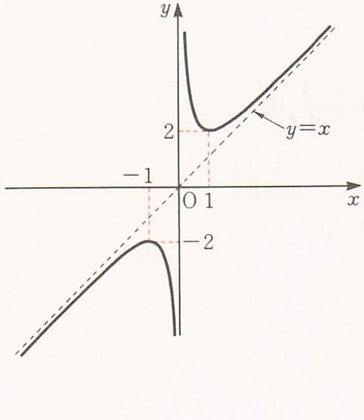
$$y = x + \frac{1}{x}$$

の増減を調べてみよう．上の公式より

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$$

となるから，増減表は，左のようになる．

これに基づいて，この関数のグラフが，次のように描ける．



C.16　定積分で面積が求められるわけ

定積分と面積の関係はA5.5で述べられている．しかし図1のような領域Dに対して，Dの中に小さな正方形(や長方形)をいくつ詰めこめるかという直観的なイメージをもってDの「面積」を考察することもできそうである(図2)．

そこで $f(x)=x^2$ を例にとり，$y=f(x)$，x軸，$x=1$ が囲む図形(図3)の面積を上の考え方に従って求めてみよう．まず

$$x_k=\frac{k}{N}\qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ N)$$

とおき，分点 x_0，x_1，……，x_N により区間 $0\leqq x\leqq 1$ をN等分する．そして図4の斜線部の面積を S_N とすると，

$$S_N=\sum_{k=0}^{N-1}f(x_k)(x_{k+1}-x_k)$$
$$=\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^2\frac{1}{N}=\frac{(N-1)N(2N-1)}{6N^3}$$
$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{2N}+\frac{1}{6N^2}$$

であるから，Nを限りなく大きくしていくと S_N は次第に $\frac{1}{3}$ に近づく．すなわち，図3の斜線部の面積は $\frac{1}{3}$ であり，A5.5の方法で計算した値

$$\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$$

と一致する．

一般に関数 $f(x)$ に対して

$$S_N=\sum_{k=0}^{N-1}f(x_k)(x_{k+1}-x_k)\qquad\cdots\cdots\cdots\quad(1)$$

で与えられる量 S_N を考えよう．ただし x_k ($k=0$, 1, ……, N) は区間 $a\leqq x\leqq b$ をN等分する点とする(図5)．ここでNを限りなく大きくする

図1

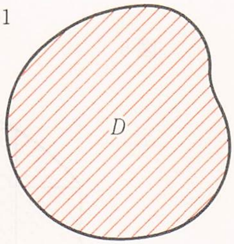


図2

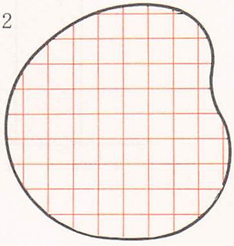


図3

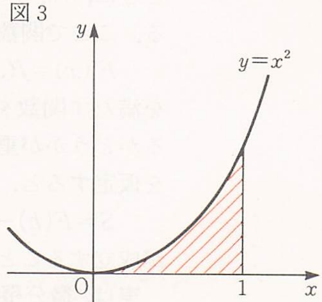


図4

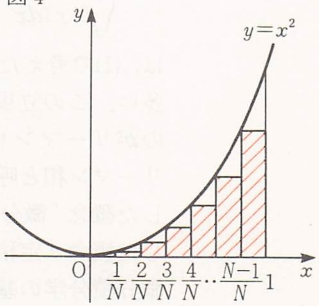
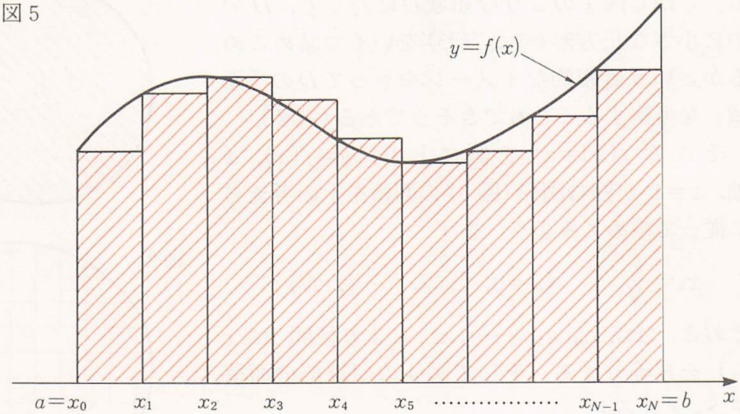


図 5



ときに，S_N が次第に近づく値が存在するとして，それを S とする．ここで関数 $f(x)$ の原始関数，すなわち

$$F'(x)=f(x)$$

を満たす関数を $F(x)$ とするとき，$F(b)-F(a)$ が S に一致するかどうかが重要な点であるが，関数 $f(x)$ に対して適当な性質を仮定すると，

$$S=F(b)-F(a) \qquad \cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

が成立することを証明することができる．

実は，微分積分学の基礎理論を構築する際には，ある便宜的理由によって，定積分

$$\int_a^b f(x)dx$$

は，(1)で考えた量 S_N の極限値 S のことであると定義することが多い．この立場から一般的関数の定積分の理論を厳密に扱ったのがリーマン (G. Riemann　1826～1866) であったので，S_N をリーマン和と呼ぶ．このとき(2)は，平均変化率の極限として定義した概念「微分」に基づく右辺と，リーマン和の極限として定義した概念「定積分」に基づく左辺が一致するという等式となり，微分積分学の基本定理と呼ばれている．

索　引

各項目の事項を記載してある箇所を示すのに，

A篇(基礎理論)に関しては，小節の番号と共に(　)内にページも記しておいた．

B篇(演習問題)，C篇(探究)に関しては，当該番号のみを示してある．

あ

移動(図形の)　C.1(274)
1次不等式の表す領域　A1.9(24)
一般解
　三角方程式の——　A2.3(87)
一般角　A2.1(79)
　——と動径の位置　A2.1(79)
n乗根　A3.2(128)
　——の計算公式　A3.2(130)
　——の大小　A3.2(130)
円の接線　A1.6(17)
円と直線の位置関係　A1.6(16)
円
　——の方程式　A1.5(14)
　——の内部・外部　A1.9(23)
扇形の弧の長さ・面積　A2.1(79)

か

解析的方法(軌跡を求める)　A1.13(29)
回転体
　——の体積　A5.7(217)
外分点　A1.1(3)
下端(積分の)　A5.3(209)
加法定理　A2.4(89,91)
関数　C.6(281)
　——の周期性　C.11(288)
関数のグラフ　A4.11(170)
　——と不等式の表す領域　A1.9(23)
　——の増減　A4.9(165)
　——の値域　A4.11(169)
幾何的方法(軌跡を求める)　A1.13(29)
奇関数と定積分　A5.4(211)
極限(値)　A4.1(152)
　——の定義　A4.1(152)
　——の記号　A4.1(152)
極小(値)　A4.9(166)
曲線
　——族　A1.12(28)
　——の方程式　A1.3(8)
極大(値)　A4.9(166)

極値　A4.9(167)
——の必要条件　A4.9(168)
距離(2点間の)　A1.2(7)
——(点と直線の)　A1.4(14)
逆関数　C.1(275)
共通弦(円の)　A1.7(19), C.3(278)
偶関数と定積分　A5.4(211)
グラフ
☞関数のグラフ, *Repos*(31)
原始関数　A5.1(206)
減少　A4.9(165)
合成(関数の)　C.7(282)
——(三角関数の)　A2.4(92)
弧度法　A2.1(78)

さ

座標　A1.1(2)
——平面　A1.2(5)
三角関数
——の定義　A2.2(81)
——の基本関係　A2.2(82)
——の公式　A2.5(93)
——のグラフ　A2.3(84)
——の合成　A2.4(92)
——の周期性　A2.3(84)
——の性質　A2.3(83)
三角方程式　A2.3(87)
3次関数　A4.12(172)
——の標準化　C.12(289)
——のグラフの概形　A4.12(172)
指数関数　A3.4(133)
——の底　A3.4(133)
指数の定義　A3.1(124), A3.3(131), C.8(283)
指数法則　A3.1(124), A3.3(132), C.9(284)
始線　A2.1(79)
写像　C.6(281)
重解
——の定義　A4.11(170)
——と導関数　A4.11(170)
周期(関数の)　C.11(288)
周期性　A2.3(84), C11(288)
重心　A1.2(6)
象限　A1.2(5)
上端(積分の)　A5.3(209)
商(分数)の微分公式　C.14(291), C.15(292)
常用対数　A3.5(137)
真数(対数の)　A3.5(135)
垂直(二直線の)条件　A1.4(13)
数直線　A1.1(2)
正弦関数　A2.2(81)
正接関数　A2.2(81)
正領域　A1.9(24)
積分区間　A5.3(209)
積分定数　A5.1(207)
積を和(または差)に変える公式　A2.5(93)
積分変数　A5.3(209)
接線　A4.8(164)
——の傾きと微分係数　〃　〃
——の公式　〃　〃
円の——　A1.6(17)
接点　A4.8(164)
0乗(定義)　A3.1(126)

増加　A4.9(165)
増減表　A4.10(168)
増分　A4.6(158)
速度，加速度　A4.11(171)

た

対称点　A1.2(5)
対数　A3.5(134)
——の定義　A3.5(135)
——関数　A3.6(138)
——の公式(法則)　A3.5(135)
——の大小　A3.5(137)
多重解　A4.11(170)
単位円　A2.2(80)
単調　A4.9(166)
値域(関数の)　A4.11(169)
中点の座標　A1.2(6)
直線
——の傾き　A1.4(10)
——の方程式　A1.4(9)
底(指数，対数の)　A3.4(133)
——の変換公式　A3.5(136)
定数関数　A4.7(161)
定積分　A5.3(209)
——とその記号　A5.3(209)
——の性質　A5.4(210)
——と面積　C.16(293)
——の応用　A5.6(215), A5.7(217), A5.8(218)
——の線型性　A5.4(210)
点と直線との距離　A1.4(14)
導関数
——の定義　A4.6(160)
——の記号　A4.6(160)
——の応用　A4.11(169)
動径　A2.1(79)
ド・モルガンの法則　B.133[注](65)

な

内部・外部(円の)　A1.9(23)
内分点　A1.1(2)
2 直線の平行条件，垂直条件　A1.4(11, 13)
2 点間の距離　☞距離
倍角の公式　A2.4(91), B.214(108)

は

媒介変数表示　A1.8(20)
——の消去　A1.8(21)
倍角の公式　A2.4(91)
発散　A4.1(152)
パッポスの中線定理　B.102(33)
半角の公式　A2.4(91)
被積分関数　A5.3(209)
微積分法の基本定理　A5.4(212)
微分　A4.6(160)
——の公式　A4.7(161)
——の線型性　A4.7(162)
微分係数　A4.6(158)
——の定義　A4.6(159)
——と接線　A4.8(164)
——の符号と増加・減少　A4.9(167)

微分法
　積の—— A4.7(163)
　商の—— C.14(291), C.15(292)
標準形の(円の方程式の) A1.5(4)
負角の公式 A2.3(86)
不定形(極限値の) A4.5(156)
不定積分 A5.1(207)
　——の記号と積分定数 〃 〃
　——の線型性 A5.2(208)
　——の求め方 A5.2(208)
不等式
　——の証明 A4.11(169)
　——と図形 A1.10(26)
負領域 A1.9(24)
分点 A1.1(2)
　——の座標 A1.2(6)
平均 C.4(279)
平均変化率 A4.6(158)
平行移動 A1.2(5)
平行条件(2直線の) A1.4(11)
変位 A5.8(218)
　——と速度 A5.8(218)
変換 C.6(281)
方向角 A1.4(10)
方程式と図形 A1.10(25)
方べきの定理 B.113[注](45)
補角の公式 A2.3(86)

ま

道のりと速度 A5.8(219)
無限大(正の) A4.4(155)
面積 A5.5(214)

や

余角の公式 A2.3(86)
余弦関数 A2.2(81)
4次関数 A4.12(173)
　——のグラフ C.13(290)

ら

ラジアン A2.1(79)
領域のパラメタ表示 A.1.11(26)
累乗
　——根 A3.2(128)
　——と指数 A3.1(124)
連続 A4.2(154)
連立不等式の表す領域 A1.9(25)

わ

和(または差)を積に変える公式 A2.5(94)

著者の先生方の横顔

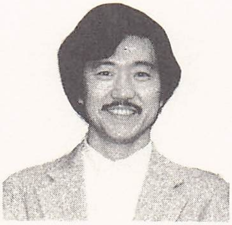
藤田　宏（ふじた　ひろし）



明治大学理工学部教授，東京大学理学部名誉教授

学生時代にすでに数学教育の重要性を認識，本書の前身「東大への数学」を執筆，研究教育・学術行政の要職の合間をぬって，数学教育国際委員会日本代表，文部省教育課程審議会委員，数学オリンピック財団理事長なども歴任され，数学教育に関し国際的・国内的に活躍していらっしゃいます．

長岡亮介（ながおかりょうすけ）



大東文化大学法学部教授

「東大に入って最も良かったことの１つは藤田宏先生にめぐりあえたこと」ということで，「大学への数学」との出会いも，藤田ゼミ時代．技術的数学に飽きたらず，その意味を求めて「数学史と数学教育にさまよい込んだ」ということで，今では「趣味は数学教育」だそうです．

東大や早大でも講義をなさっているので，先輩たちには，先生に習った人もいるかもしれませんよ！

長岡恭史（ながおかやすふみ）



駿台予備学校教科専任講師

大学を出て，最初は，駿台甲府高校で教えていらっしゃったのですが，いまは有名な「スンダイ」の先生です．若い情熱と誠実な教え方で，生徒の信頼と尊敬を集めていらっしゃいます．

受験指導の現場を数多く経験した立場から“使いやすく”“わかりやすい”「大学への数学」のために多くの提案を出して頂きました．なお，先生は長岡亮介先生の弟さんです．

◇◇◇研文書院◇◇◇

新 課 程

大学への数学IIニューアプローチ

著　者	藤田　宏　　長岡亮介 長岡恭史
発行者	飯塚　潤
発行所	株式会社 研文書院
〒166	東京都杉並区成田東３－６－３
TEL	03(3312)9033
FAX	03(3312)8541
振替口座	00130-0-56451

印刷　大成舎　　　　製本　伸光堂

ISBN4-7680-1059-8

ISBN4-7680-1059-8 C7341 P1900E
定価 1900円(本体 1845円)